

Harry Potter trifft Alice im Wunderland der Mathematik

Annalina Vorbau

Ulrich Eckhardt

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkung	1
2	Was machen Mathematiker den ganzen Tag über?	1
3	Ein Streit zwischen Hermine und Ron	3
4	Ein Kartentrick	4
5	Wie Mathematik drei Kamelen das Leben rettet	6
6	Ein Zwerg verschwindet	7
7	Wolf, Ziege und Kohlkopf	9
8	Möbiusband	11
9	Affen, die auf Tigern reiten	14
10	In einem Zug	15
11	In drei Zügen	17
12	Das Problem der Königsberger Brücken	20
13	In einem Irrgarten	23
14	Die Weinkrugaufgabe	24
15	Geschäfte mit Betrügern	27

Vortrag am 29. Juli 2008 im Rahmen der Veranstaltung Kinder-FerienUni im Freudenhaus Bregenz.

16 Sudoku	28
17 Blöcke stapeln	32
Literatur	34

1 Vorbemerkung

Dies ist das Manuskript einer Veranstaltung. Es handelt sich um ein Gespräch über Mathematik zwischen Annalina Vorbau (im Text mit **A** abgekürzt und blau markiert), die 12 Jahre alt ist und ihrem Großvater (im Text mit **G** abgekürzt), der ein wenig älter ist.

Im Text sind zahlreiche Literaturhinweise gegeben, die sich auf das Literaturverzeichnis auf Seite 34 beziehen. eine Nummer in eckigen Klammern weist auf ein solches Literaturzitat hin. So bedeutet [14] einen Hinweis auf das Buch *Harry Potter und der Stein der Weisen*.

Einige schöne Spiele konnten hier in dem Text nicht abgebildet werden, da sie bereits in Büchern vorkommen. Das Urheberrecht verbietet, Bilder aus Büchern einfach zu übernehmen. Aus diesem Grunde wurden die betreffenden Bücher zitiert und Web-Adressen zu den Themen angegeben, so daß man dann dort nachsehen kann.

2 Was machen Mathematiker den ganzen Tag über?

G: Meine Damen, meine Herren!

A: Großvater! Du bist hier nicht in Deiner Vorlesung! Das sind doch alles Kinder!

G: Oh ... Ja. Also: Liebe Kinder!

Ihr habt es gehört, ich bin Mathematiker. Die Mathematik besteht aus den Gebieten Algebra, Geometrie, Analysis, ...

A: Aber Großvater, das interessiert doch hier niemand. Sage uns lieber, was ein Mathematiker so alles macht. Rechnet ihr vielleicht jeden Tag aus, ob 2×2 immer noch 4 ist?

G: Nein, natürlich nicht. Wir Mathematiker machen zum größten Teil sehr nützliche Dinge. Zum Beispiel könnte der Airbus A 380 niemals fliegen, wenn nicht vor der eigentlichen Konstruktion sehr viel gerechnet worden wäre. Man kann bei einem solch komplizierten Gerät nicht jedes Detail ausprobieren, das würde kein Testpilot mitmachen wollen. Das sind dann sehr umfangreiche und komplizierte Rechnungen, nämlich Systeme nichtlinearer partieller Differentialgleichungen ...

A: Lieber nicht, Großvater! Das ist ja alles hochinteressant, aber wir haben nicht so viel Zeit. Sag uns lieber, was ein Mathematiker alles können muß.

G: Vor allem muß ein Mathematiker eine sehr gute Note in Deutsch gehabt haben.

A: Ich dachte, eher in Mathematik.

G: Nein, ein Mathematiker muß nicht nur exakt denken, sondern sich vielmehr gut und präzise ausdrücken können. Wenn ich zum Beispiel sagen würde: „Diese Stütze sollte halt etwa 2 cm oder so dick sein“, dann ist das eine Formulierung, die man mißverstehen kann. Ist die Stütze nämlich nur 1.9 cm dick, dann könnte sie bei Belastung knicken, ist sie aber 2.1 cm dick, dann könnte sie zu schwer sein. Sogar kleine Fehler bei der Verständigung können schlimme Folgen haben.

A: Und was hat denn nun Mathematik nun mit Harry Potter und Alice im Wunderland zu tun?

G: Das ist recht einfach. Einmal muß Harry Potter neben vielen anderen Dingen auch Mathematik lernen, oder was ist *Arithmantik* [16, S. 260] denn anderes als eben magische Mathematik? Das *Pentagramm*, das regelmäßige Fünfeck (Abbildung1), ist eine interessante geometrische Figur und seit der Zeit der Pythagoreer, also seit etwa zweieinhalbtausend Jahren, ein magisches

Abwehrsymbol. Es ist bei uns auch unter dem Namen *Drudenfuß* bekannt. Den gleichen Namen trägt auch die weiße Mistel.

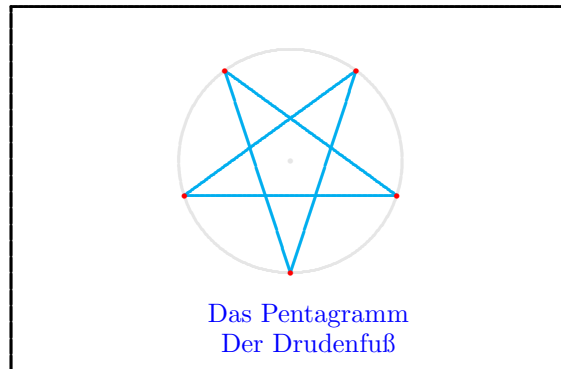


Abbildung 1: Das Pentagramm oder der Drudenfuß.

A: Das ist doch die Pflanze, die ich neulich im Arboretum bei Elmshorn photographiert habe! (Abbildung 2)

G: Richtig, Man sieht auf der Aufnahme auch, daß der Baum, der die Mistel trägt, auf einem Pentagramm wächst.

Übrigens: Die Leser von *Asterix und Obelix* wissen sicher, daß der Druide Miraculix mit einer goldenen Sichel Misteln schneidet. Er braucht sie für seine Zaubersäfte.



Abbildung 2: Weiße Mistel (links) auf einem Silber-Ahorn (rechts).

Noch eine kleine Denksportaufgabe zum Schluß: Kann man zehn Kinder (Münzen, Steine oder Spielmarken) in fünf Reihen zu je vier Kindern aufstellen?

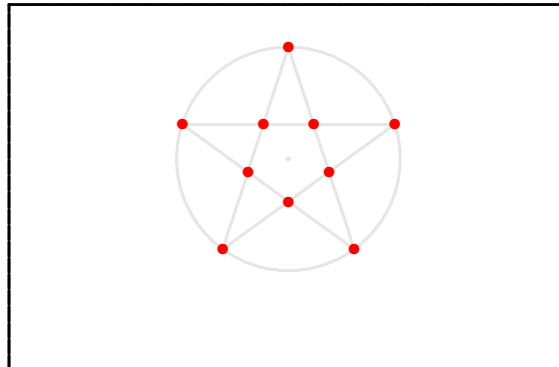


Abbildung 3: Kann man zehn Kinder in fünf Reihen zu je vier Kindern aufstellen?

A: Sicher nicht in fünf Reihen hintereinander, dazu brauchte man ja insgesamt zwanzig Kinder. Aber sicher hat die Antwort auf diese Denksportaufgabe etwas mit dem Pentagramm zu tun.

G: Natürlich, in Abbildung 3 ist dargestellt, wie man die Kinder anordnen muß.

3 Ein Streit zwischen Hermine und Ron

G: Aber Mathematik hat noch sehr viel mehr mit Alice und Harry Potter zu tun. So ist das Buch über die Abenteuer von Alice von einem Mathematiker unter dem Künstlernamen Lewis Carroll geschrieben worden. Sein eigentlicher Name war Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898).

Was Harry Potter anbelangt, so weißt Du sicher, daß Hermine immer sehr klar denkt und redet, und daß Ron erst einmal redet oder handelt und danach denkt. Nehmen wir einmal an, Ron habe sich wieder einmal über Hermine aufgeregt und sagt, daß alles, was Hermine sagt, falsch sei, und er läßt sich dazu hinreißen, zu behaupten:

Was Hermine jetzt sagen will, ist falsch!

A: Hermine könnte jetzt antworten:

Das ist gar nicht wahr!

So redet man aber doch nur im Kindergarten!

G: Richtig! Da Hermine eben sehr klug ist, sagt sie nur:

Alles, was Ron gesagt hat, ist richtig!

Nun überlegt einmal: Entweder hat Ron recht, dann ist das, was Hermine eben gesagt hat, falsch, also das, was Ron gesagt hat, nicht richtig, also falsch, also hat Ron nicht recht. Hat er aber nicht recht, dann ist die Aussage von Hermine wahr, also hat Ron recht! Es ist eben schon sehr schwierig mit der Sprache. Und eben deshalb sollte ein Mathematiker mit der Sprache perfekt umgehen können, er sollte also schon eine gute Note in Deutsch gehabt haben.

Übrigens: Es waren die Probleme, die solche Sätze darstellen, die 1931 den Mathematiker Kurt Gödel dazu führten, die Grundlagen der Mathematik zu erschüttern.

A: Wechseln wir das Thema! Was macht Ihr denn sonst noch so?

4 Ein Kartentrick

G: Zuweilen zaubern wir.

A: Aber Du hast doch gar keinen Zauberstab.

G: Ich zaubere auch nicht richtig.

A: Das verstehe ich nicht, vielleicht kann uns hier ein Versuch weiterhelfen.

G: Dafür brauchen wir aber eine mutige Person aus dem Publikum.

(Die Assistentin bittet eine mutige Person nach vorn).

G: Wir haben jetzt folgendes vor: Unsere mutige Person aus dem Publikum wird gebeten, fünf beliebige Karten aus einem Rommé-Spiel auszuwählen. Wir haben vorher die Joker entfernt, so daß insgesamt 52 Karten verblieben sind. Die fünf gewählten Karten händigt die mutige Person meiner Assistentin Annalina aus. Meine Assistentin schaut sich die Karten sehr gründlich an, damit in ihrem Kopf ein mentales Bild der Karten entsteht, und ich versuche dann, dieses Bild aus ihren Gedanken zu lesen. Dazu werde ich mich sehr konzentrieren müssen, und das klappt nicht immer. Deshalb muß ich Euch alle bitten, uns zu helfen. Konzentriert Euch bitte alle auf die fünf Karten in den Händen meiner Assistentin. Eigentlich hatte ich vor, alle fünf Karten zu erraten, aber da müssen wir wohl noch sehr viel üben, es hat noch nie geklappt.

Meine Assistentin wird mir jetzt nacheinander vier der fünf Karten zustellen lassen und eine einbehalten.

...

Ich habe jetzt also vier Karten, 47 Karten liegen in dem Stapel, und eine hält meine Assistentin. Ich muß nun raten, welche unter den mir nicht bekannten 48 Karten meine Assistentin in der Hand hält. Das ist nicht einfach und erfordert eine große Anstrengung. Ich lege mir die vier Karten jetzt an die Stirn, damit ich die feinen Schwingungen empfangen kann, die sie von der fünften Karte erhalten haben. Zudem versuche ich jetzt, in den Gedanken meiner Assistentin zu lesen. Darf ich nun um absolute Ruhe bitten. Es ist (G. nennt die letzte Karte).

A: Nun habt Ihr hoffentlich nicht geglaubt, daß mein Großvater wirklich Gedanken lesen kann. Das ist etwas, was Mathematiker nicht lernen, und Ihr wißt aus den Harry-Potter-Büchern, daß Gedankenlesen, *Legilimentik*, auch für Zauberer so gut wie unmöglich ist – mit Ausnahme von Professor Snape, Ihr-wißt-schon-wen und schließlich auch Harry.

Also: Was haben wir gemacht?

G: Der Trick, den wir Euch vorgeführt haben, hat sehr viel mit Mathematik zu tun. Er wurde sogar in einer mathematischen Zeitschrift publiziert [12].

Meine Assistentin hat fünf Karten erhalten und mir davon vier zugestellt. Dabei ist die Reihenfolge, in der ich sie zugestellt bekomme, das Signal, aus dem ich die fünfte „erraten“ kann. Meine Assistentin sendet mir also eine „Nachricht“ zu, und sie muß diese Nachricht geschickt

zusammenstellen, so daß ich dann genau weiß, welche Karte sie in der Hand behalten hat. Für diejenigen, die schon etwas von Mathematik verstehen: Es gibt 24 verschiedene Möglichkeiten, fünf Karten anzuordnen, wir haben aber 48 Karten, unter denen sich die gesuchte befindet. Es muß also noch ein kleiner Trick hinzukommen.

Da meine Assistentin fünf Karten bekommen hat, müssen mindestens zwei davon die gleiche „Farbe“ haben, also Kreuz (♣), Pik (♠), Herz (♥) oder Karo (♦). Von diesen beiden Karten behält meine Assistentin eine ein, die andere schickt sie mir als erste zu. Damit habe ich schon einmal die Farbe der gesuchten Karte. Meine Assistentin wählt die Karte, die sie behält, aber sehr klug. Beim Rommé hat man für jede Farbe die Werte 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bube (B oder auf englischen Spielkarten J), Dame (D oder Q), König (K) und As (A). Man kann sich diese 13 Werte auf einem Kreis angeordnet denken wie in Abbildung 4. Wir Mathematiker nennen dies „zyklische“ Anordnung. Wenn man nun zwei Kartenwerte hat, dann kann der geringste Abstand zwischen ihnen auf unserem Kreis höchstens sechs betragen, man muß also nur richtig zählen.

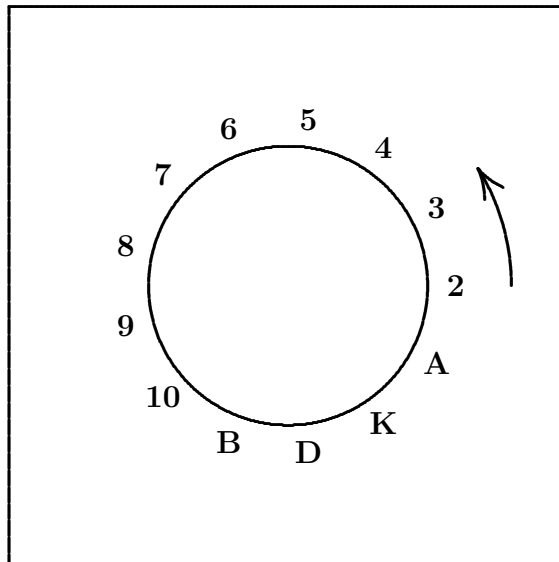


Abbildung 4: Zyklische Anordnung (Pfeil) der Kartenwerte einer Farbe.

A: So versteht das doch niemand! Nehmen wir doch einfach einmal ein Beispiel. Wenn ich die fünf Karten ♦ 9, ♠ 6, ♦ 3, ♦ D, ♣ 4 bekomme, dann kann ich mir zwei der Karokarten aussuchen. Wählen wir doch einmal die beiden Karten ♦ 9 und ♦ D. Wenn ich von der Dame anfangen zu zählen, dann erhalte ich die Reihe K, A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, der Abstand der beiden Karten wäre also 10. Beginne ich aber mit der 9, dann erhalte ich 10, B, D, der Abstand ist jetzt 3. Ich wähle den kleineren der beiden Abstände und lasse also meinem Partner die ♦ 9 zukommen.

G: Nun muß meine Assistentin mir noch mitteilen, welchen Abstand die beiden Karten voneinander haben. Es kommen bei geschickter Auswahl nur Abstände zwischen 1 und 6 in Frage. Die verbleibenden Karten kann man in eine Reihenfolge bringen, indem man die Farben wie oben angedeutet sortiert, also ♣, ♠, ♥, ♦. Innerhalb einer Farbe wird nach aufsteigendem Wert von 2 bis A sortiert, man hat also die Anordnung ♣ 2, ♣ 3, ♣ 4, ..., ♣ As, ♠ 2, ..., ♠ As, ..., ♦ As.

In dieser Zählung hat von den drei verbliebenen Karten eine den niedrigsten Wert (wir kürzen das mit **n** ab), eine den mittleren Wert (**m**) und eine den höchsten (**h**) Wert. Meine Assistentin sendet mir nun die Karten in einer Reihenfolge, die mir den Abstand verrät. Dabei benutzen wir

die folgende Tabelle:

Zahl	Reihenfolge		
1	n	m	h
2	n	h	m
3	m	n	h
4	m	h	n
5	h	n	m
6	h	m	n

A: Laß mich das an unserem Beispiel erklären. Ich hatte Dir die $\diamond 9$ zugestellt, und die $\diamond D$ wird einbehalten. Die verbleibenden Karten sind $\clubsuit 4$, $\spadesuit 6$, $\diamond 3$. Wenn ich sie, wie beschrieben, in die richtige Reihenfolge bringe, dann habe ich

niedrigster Wert	n	$\clubsuit 4$
mittlerer Wert	m	$\spadesuit 6$
höchster Wert	h	$\diamond 3$

Nun möchte ich meinem Partner mitteilen, daß der Abstand zwischen der Karte, die er schon hat und der gesuchten Karte 3 ist. Die 3 hatten wir codiert als **m, n, h**, also sende ich ihm die Karten in der Reihenfolge $\spadesuit 6$, $\clubsuit 4$, $\diamond 3$. Und wenn mein Partner gut aufgepaßt und richtig gerechnet hat, dann müßte er jetzt wissen, welche Karte ich in der Hand halte.

G: Vielleicht versucht Ihr es einmal selbst in Ruhe zu Hause, Ihr werdet sehen, daß das gar nicht so schwer ist, und Ihr könnt Eure Freundinnen und Freunde damit beeindrucken.

5 Wie Mathematik drei Kamelen das Leben rettet

A: Wir haben gesehen, daß man mit Mathematik viele nützliche Dinge machen kann. Wozu ist Mathematik eigentlich noch gut?

G: Man kann mit Mathematik viel Spaß haben. Es gibt sehr viele mathematische Aufgabenstellungen, die keinen direkten Nutzen haben, die nur dazu dienen, auf unterhaltsame Weise sich mit Mathematik zu vergnügen. Schon seit den ältesten Zeiten sind solche Aufgabenstellungen der „Unterhaltungsmathematik“ bekannt.

A: Kannst Du uns ein Beispiel geben?

G: Eine sehr alte Geschichte ist die von einem arabischen Kaufmann. Man findet sie in dem Buch von Olivastro [13, S. 53], auch Adrion führt die Geschichte an [1, S. 98–99]. Der Kaufmann hatte in seinem Testament verfügt, daß sein ältester Sohn die Hälfte seiner Kamele erben solle, der mittlere ein Drittel und der jüngste ein Neuntel. Als der Kaufmann gestorben war, betrug sein Besitz aber 17 Kamele.

A: Demnach hätte der älteste Sohn $8\frac{1}{2}$ Kamele erhalten, der mittlere $5\frac{2}{3}$ und der jüngste $1\frac{8}{9}$ Kamele. Das würde doch dann heißen, daß ein oder mehrere Kamele geschlachtet werden müßten.

G: Natürlich hätte ein Sohn eines arabischen Kaufmanns niemals ohne Not ein Kamel geschlachtet, dazu waren diese Tiere zu wertvoll.

A: Ich würde auch nicht wollen, daß ein armes Kamel geschlachtet wird. Gibt es keinen besseren Weg?

G: Eben: Die Mathematik zeigt uns einen Ausweg aus der Situation. Die drei Söhne kannten einen sehr weisen alten Mann. Sie fragten ihn um Rat. Nach längerem Nachdenken – und vielleicht auch Rechnen – sagte der: „Seht, ich bin nicht sehr reich, ich habe nur ein einziges Kamel. Dieses werde ich Euch schenken, und ihr werdet sehen, daß damit alle Eure Probleme gelöst sind.“

A: Es waren nun mit dem Kamel des weisen alten Mannes 18 Kamele. Dann erhält also der älteste Sohn jetzt 9 Kamele, der mittlere 6 und der jüngste 2 Kamele. Das sind insgesamt 17 Kamele.

G: Richtig, es bleibt hier also ein Kamel übrig, und dieses eine Kamel erhält der weise alte Mann zurück, und es sind in der Tat alle Probleme beseitigt.

A: Da kann doch etwas nicht stimmen! Haben wir vielleicht etwas Wichtiges übersehen?

G: Ja und nein. Jetzt kommt die eigentliche Mathematik. Für diejenigen, die in der Schule schon Bruchrechnung hatten, sollte es ganz einfach sein. Es ist nämlich

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9 + 6 + 2}{18} = \frac{17}{18},$$

der Vater hat in seinem Testament nicht wirklich **alle** seine Kamele an seine Söhne vererbt, sondern nur $\frac{17}{18}$ seiner Kamele. Wenn der Vater nicht 17, sondern 18 Kamele besessen hätte, dann wäre bei Teilung nach dem Testament ein Kamel übriggeblieben, welches keinem der drei Söhne vererbt worden wäre, wie wir gesehen haben. Man könnte es auch so sehen: Du hattest ausgerechnet, daß der älteste Sohn $8\frac{1}{2}$ Kamele, der mittlere $5\frac{2}{3}$ und der jüngste $1\frac{8}{9}$ Kamele erhalten. Wenn alle drei Söhne sich einig sind, daß kein Kamel geschlachtet werden soll, dann könnten sie – wenn sie klug sind – zunächst einmal beschließen, daß der älteste auf ein halbes Kamel verzichtet und 8 Kamele nimmt, der mittlere verzichtet auf $\frac{2}{3}$ eines Kamels und nimmt 5 Kamele und der jüngste verzichtet auf $\frac{8}{9}$ eines Kamels und begnügt sich mit einem.

A: Damit wären $8 + 5 + 1 = 14$ Kamele schon einmal verteilt, und es bleiben drei übrig. Wenn man jetzt jedem der drei Söhne noch ein Kamel gibt, dann hat jeder mehr bekommen, als ihm nach dem Testament zusteht, aber es muß kein armes Kamel geschlachtet werden. Das finde ich sehr gut!

6 Ein Zwerg verschwindet

A: Ein richtiger Zauberer muß doch auch Dinge verschwinden lassen können. In dem Buch *Alice im Wunderland* [6] verschwindet zum Beispiel die Cheshire-Katze allmählich, während Alice hinschaut. Auch in den Büchern von Harry Potter verschwinden Menschen und Dinge. Könntest Du zum Beispiel einen Elefanten verschwinden lassen?

G: Ja, hast Du zufällig einen Elefanten bei Dir? Aber im Ernst, ein Elefant wäre mir doch ein wenig zu groß, und ich kann ja nicht wirklich zaubern. Wir brauchten etwas kleineres, etwa einen ...

A: Einen Zwerg?

G: Ja, richtig, einen Zwerg! Es gibt einen sehr hübschen Trick, der von dem großen Magier Alexander Adrion in seinen Büchern über Zauberei beschrieben wird [2, S. 240–241] (ebenfalls in dem

Buch [1] ist dies Spiel enthalten¹). Man hat ein Bild, auf dem fünfzehn Zwerge dargestellt sind. Wenn man das Bild geeignet in drei Teile zerschneidet und diese dann wieder neu zusammenfügt, sind es nur noch vierzehn Zwerge.

Alexander Adrion gibt eine Anzahl von Experimenten an, die er vergeblich mit diesem Zwergenspiel unternommen hat. Er kann sich nicht erklären, wie es funktioniert und hält es für „durchaus magisch“ [2, S. 241]

A: Aber Du als Mathematiker mußt doch wissen, was geschehen ist!

G: Das schon, aber wir Mathematiker versuchen es immer am liebsten zunächst an einfachen Aufgaben, und Du mußt zugeben, daß Zwerge nicht einfach sind. Darf ich erst einmal zur Veranschaulichung Striche beziehungsweise Balken wählen?

A: Gut! Aber vergiß die Zwerge nicht!

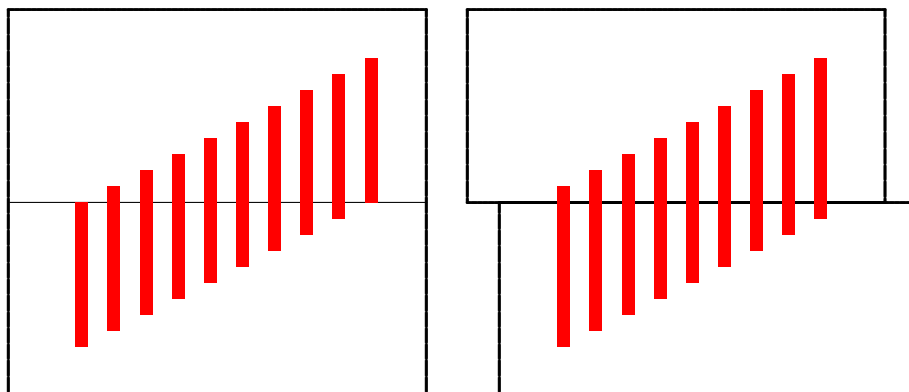


Abbildung 5: Ein Balken verschwindet – erster Versuch.

G: Schaut Euch einmal das linke Bild in Abbildung 5 an. Wir sehen zehn senkrechte Balken. Wenn wir das Bild in der Mitte längs der dünnen Linie zerschneiden und die obere Hälfte ein wenig nach links verschieben, dann erhalten wir das rechte Bild, und dieses enthält nur noch neun Balken, ein Balken ist also verschwunden!

A: Das ist ja nun sehr simpel!

G: Um die Lage etwas zu verwirren, mischen wir die Balken geschickt. Das ist nicht ganz einfach, man muß schon etwas überlegen und probieren. Sieh Dir jetzt einmal Abbildung 6 an. Links haben wir zehn Balken. Schneidet man die linke Figur an den dünnen Linien auseinander und vertauscht dann die beiden oberen Teile, dann sind es nur noch neun Balken.

A: Das ist doch auch kein schwieriger Trick. Wenn man in der linken Abbildung 6 etwa den zweiten Balken von links ansieht und wenn man sich überlegt, was aus ihm wird, dann ist die Sache doch sonnenklar!

G: Für Dich! Du bist aber auch besonders klug.

¹Adrion gibt in seinem Buch [2] an: Das Original-Puzzle »The Vanishing Leprechaun«, 20 × 49 cm, kann bei W. A. Elliott Co., 212 Adelaide St. W., Toronto M5H 1W7, Kanada bezogen werden. Noch einfacher: Man kann das Spiel aus dem Internet unter der Adresse <http://www.planetperplex.com/en/item26> beziehungsweise <http://www.planetperplex.com/en/sliding-puzzles.html> herunterladen.

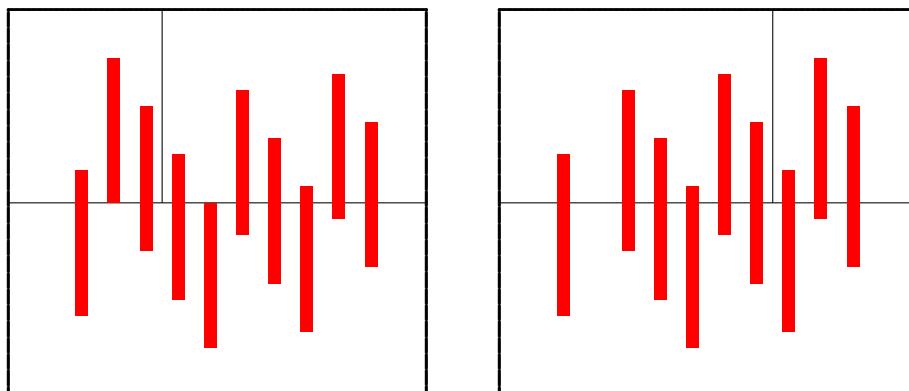


Abbildung 6: Ein Balken verschwindet – zweiter Versuch.

Doch nun zurück zu den Zwergen. Wenn wir das Zwergenspiel nun genau betrachten, dann sehen wir, daß im zweiten Bild ein Zwerg völlig verschwunden ist und daß alle Zwerge ein wenig länger geworden sind.

In dem Buch *Mathematik und Magie* von Martin Gardner [11, Kapitel 7. Geometrisches Verschwinden – Teil 1, S. 136–148] findet man eine ausführliche Beschreibung des Tricks und viele Varianten. Eine sehr hübsche Variante des Problems des verschwindenden Zwerges stammt von von Mel Stover. Sie ist ebenfalls in dem Buch von Gardner zu finden [11, S. 147]. Dieser Trick ist in Abbildung 7 dargestellt. Auch hier muß man das vorgegebene Bild entlang der eingezeichneten Linien zerschneiden. Setzt man das Bild einmal so zusammen, wie in der rechten Bildhälfte angedeutet ist, und dann so, wie in der linken Hälfte gezeigt wird, dann hat ein Bleistift die Farbe gewechselt.

A: Hier ist der „Übeltäter“ leicht zu finden. Sieh Dir doch nur einmal den vierten Bleistift von links in beiden Teilbildern an!

7 Wolf, Ziege und Kohlkopf

A: Gibt es noch mehr solche lustigen Aufgaben wie zum Beispiel die mit dem Kaufmann und seinen Kamelen?

G: Es gibt Unmengen von Unterhaltungsaufgaben und es sind zahllose Bücher über diesen Gegenstand geschrieben worden. Eines dieser Bücher hat den Titel *Propositiones ad acuendos iuvenes*. Kannst Du diesen lateinischen Titel übersetzen?

A: Natürlich! Es heißt *Aufgaben zur Schärfung des Geistes der Jünglinge*.

G: Dieses Buch wurde von Alkuin von York, dem Abt von St. Martin in Tours geschrieben. Alkuin war Vertrauter von Karl dem Großen. Ihr wißt natürlich alle, wann Karl der Große gelebt hat, nämlich um 800.

A: Das sind ja 1 200 Jahre her!

G: Richtig! Alkuin erzählt in seinem Buch die folgende Geschichte, von der ich der Einfachheit halber gleich die Übersetzung zitiere [13, S. 155 und 165]:

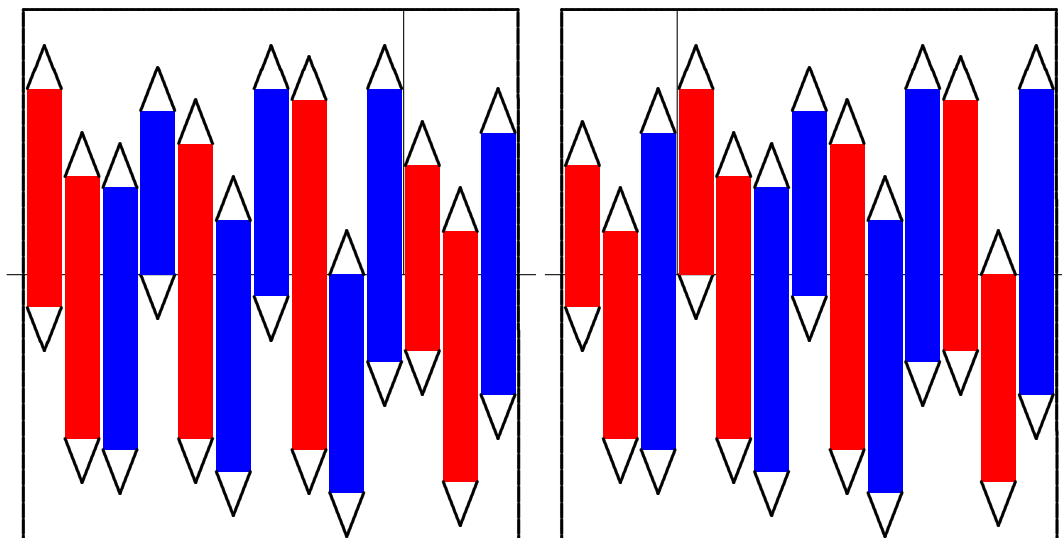


Abbildung 7: Ein Bleistift wechselt seine Farbe.

Ein Mann mußte einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf über den Fluß bringen. Doch er konnte nur ein Boot finden, in dem nur zwei auf einmal Platz hatten. Aber der Mann hatte nun einmal den Befehl erhalten, alle drei wohlbehalten zur anderen Seite zu bringen. Wie konnte dies geschehen?

A: Das heißt also, daß der Mann niemals den Wolf und die Ziege beziehungsweise die Ziege und den Kohlkopf zusammen unbeaufsichtigt an einem Ufer alleinlassen durfte. Außerdem verstehe ich die Aufgabe so, daß das Boot neben dem Fährmann nur einen weiteren Passagier – Wolf, Ziege oder Kohlkopf – tragen kann.

G: Ganz richtig! Wir können die Lösung durch Probieren finden, es gibt aber auch mathematische Methoden. Wenn es Dir recht ist, versuchen wir es einfach einmal mit Probieren.

A: Einverstanden! Es ist klar, daß der Fährmann zuerst die Ziege ans andere Ufer bringen muß. Dann bleibt der Wolf mit dem Kohlkopf zurück, und diese beiden tun einander nichts.

G: Richtig! Der Fährmann rudert allein wieder zurück, denn die Ziege wieder mit ans Ausgangsufer zu nehmen, würde ja nur die Ausgangssituation herstellen, und das hilft nicht weiter.

A: Bei der nächsten Überfahrt könnte der Fährmann den Wolf oder den Kohlkopf übersetzen. Nehmen wir an, er würde den Kohlkopf auf die andere Seite bringen.

G: Auch dann ist wieder ganz klar, was er nun machen muß, die Ziege und der Kohlkopf dürfen auf keinen Fall allein am anderen Ufer zurückbleiben.

A: Das heißt, auf der Rückfahrt muß der Fährmann die Ziege einladen. Den Kohlkopf wieder zurückzufahren, wäre ja wenig sinnvoll.

G: Wenn der Fährmann also ans Ausgangsufer zurückkommt, dann befindet sich dort der Wolf und die Ziege.

A: Und diese beiden dürfen auf keinen Fall zusammen zurückbleiben. Der Fährmann muß also auf der nächsten Fahrt einen der beiden mitnehmen. Das kann aber nicht die Ziege sein, denn

diese hat er ja gerade übersetzt.

G: Er wird also den Wolf einladen. Auf dem anderen Ufer befinden sich danach Wolf und Kohlkopf, eine ungefährliche Zusammenstellung.

A: Nun ist aber alles klar. Der Fährmann läßt Wolf und Kohlkopf am anderen Ufer und fährt zurück, um die Ziege zu holen. Und damit wäre das Problem gelöst!

Aber ehrlich: Was hat das nun mit Mathematik zu tun?

G: Ein Mathematiker würde sich überlegen: Läßt sich eine Methode angeben, um für eine solche Aufgabe immer eine Lösung zu finden? Oder anders ausgedrückt: Wie würde ein Computerprogramm aussehen, welches diese Aufgabe automatisch löst?

Solche Aufgabenstellungen, bei denen man unter verschiedenen Möglichkeiten die richtige suchen muß, sind in der Informatik recht beliebt. Bevor man sich an die Lösung einer solchen Aufgabe macht, muß man sie erst einmal klar und unmißverständlich, also computergerecht formulieren. Die Informatiker sprechen davon, daß man eine geeignete *Datenstruktur* finden muß. Wir wollen dies hier nicht weiter vertiefen, aber einen Eindruck kann Abbildung 8 vermitteln. Hier ist jede uns interessierende Situation durch einen Kasten dargestellt, in dessen linker Hälfte angegeben ist, wer sich gerade am Ausgangsufer befindet (**F** = Fährmann, **W** = Wolf, **Z** = Ziege und **K** = Kohlkopf). Ein Pfeil symbolisiert eine Überfahrt über den Fluß, ein Buchstabe W, Z oder K am Pfeil zeigt an, wer den Fährmann begleitet.

Wir sehen im untersten Kasten die Ausgangssituation, alle befinden sich am linken Ufer. Die beiden Pfeile mit der Bezeichnung K beziehungsweise W sind rot markiert, denn wenn der Fährmann den Wolf ans andere Ufer bringt, würde die Ziege sich erfreut dem Kohlkopf zuwenden, ebenso darf der Fährmann auf seiner ersten Fahrt nicht den Kohlkopf transportieren.

Der gestrichelte grüne Pfeil zeigt an, daß die beiden mittleren Situationen nach der vierten Überfahrt nicht neu sind, sie entsprechen genau der Situation nach der zweiten Überfahrt, und es bringt daher nichts, sie weiter zu verfolgen.

Das Schema ist nicht ganz zu Ende geführt, zum Schluß muß der Fährmann noch einmal ohne Ladung ans linke Ufer fahren, um die Ziege dort abzuholen. Das ist aber klar und muß nicht extra ausgeführt werden. Ebenso wurden „triviale“ Überfahrten weggelassen. So könnte zum Beispiel nach der ersten Überfahrt der Fährmann die Ziege wieder mit zurücknehmen. Damit wäre aber nichts gewonnen, deshalb wurde diese Möglichkeit auch nicht berücksichtigt.

Interessant ist, daß wir aus dem Schema sofort sehen können, daß es zwei verschiedene Lösungen gibt. Auf der dritten Überfahrt kann der Fährman entweder den Wolf oder den Kohlkopf mitnehmen, er gelangt auf jeden Fall schließlich zu einer Lösung.

8 Möbiusband

A: Kannst Du uns jetzt etwas richtig Mathematisches zeigen?

G: Zunächst einmal: Alles, was ich Euch bis jetzt gezeigt habe, hatte etwas mit Mathematik zu tun.

A: Aber nicht mit der Mathematik, die wir in der Schule gelernt haben.

G: Richtig, ich gehe aber nicht mehr auf die Schule und darf mir die Mathematik aussuchen, die mir Spaß macht.

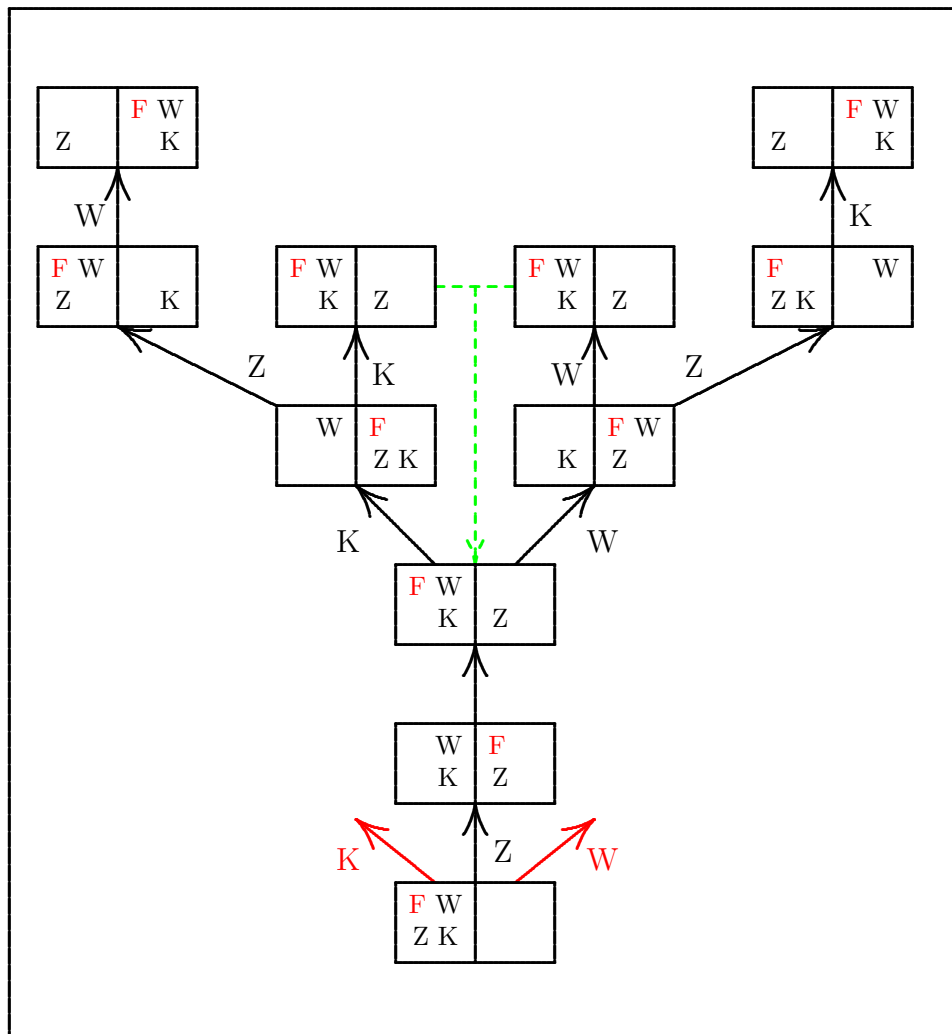


Abbildung 8: Wolf, Ziege und Kohlkopf – schematische Darstellung des Lösungsweges.

Ein sehr schönes Gebiet der Mathematik ist die *Topologie*.

A: Großvater, Du solltest doch keine Fachausdrücke benutzen! Lassen wir Deine Topologie, bringe uns lieber ein schönes Beispiel.

G: Mit einem einfachen Papierstreifen, etwas Leim und einer Schere kann man interessante mathematische Experimente ausführen. Dazu brauchten wir aber gleich drei mutige Personen aus dem Publikum.

(Die Assistentin bittet drei mutige Personen nach vorn).

G: Für die erste mutige Person nehmen wir einen Papierstreifen wie in Abbildung 9 und heften ihn zu einem Papierring, indem wir die mit B bezeichnete Ecke mit der Rückseite der Ecke C zusammenheften und die Ecke A mit Rückseite der der Ecke D.

Die zweite mutige Person erhält auch einen Papierstreifen, nur drehen wir diesen vor dem Zu-

sammenheften um eine halbe Drehung, das heißt, die Ecke A kommt jetzt direkt auf C und B kommt auf D. Man erhält ein Gebilde, das wie in Abbildung 10 aussieht. Ein solches Band wird von den Mathematikern als *Möbiusband* bezeichnet nach dem Mathematiker und Astronomen August Ferdinand Möbius (1790 – 1868).

Die dritte mutige Person erhält einen Streifen, den wir vor dem Zusammenheften um eine ganze Drehung drehen. Bei dem gedrehten Streifen kommt also wieder B auf auf die Rückseite von C und A auf auf die Rückseite von D.

Wenn jetzt jede unserer hilfreichen Personen aus dem Publikum den Streifen längs der Mittellinie aufschneidet, was wird dann wohl geschehen. Hat jemand eine Ahnung?

...

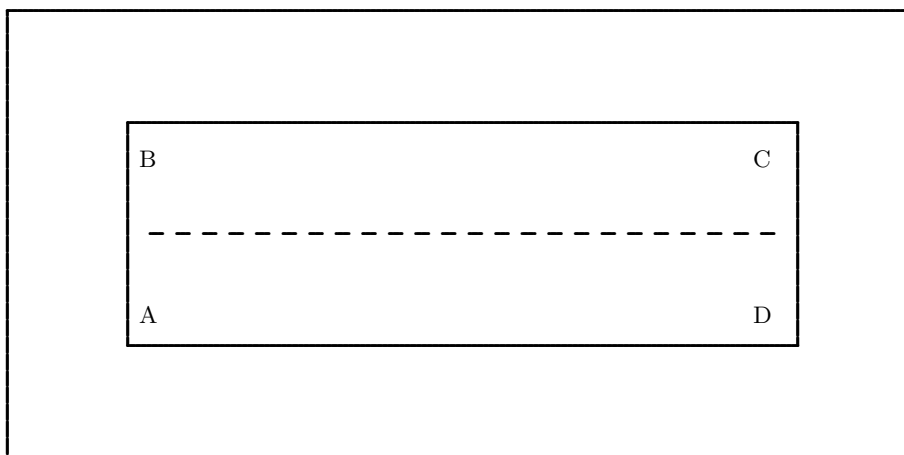


Abbildung 9: Der Papierstreifen vor dem Zusammenkleben.

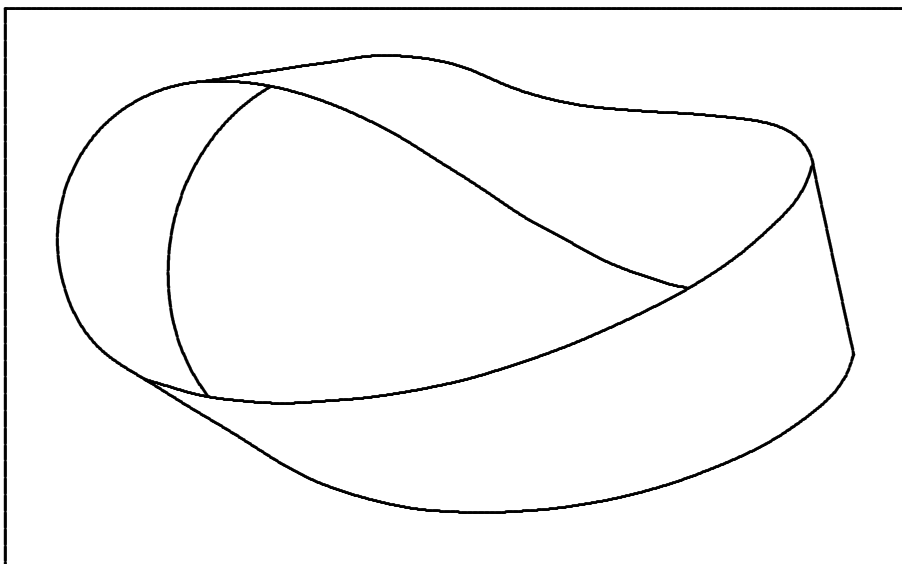


Abbildung 10: Das zusammengeklebte Möbiusband.

G: Man kann noch zahlreiche weitere Experimente mit überraschendem Ausgang mit solchen Bändern machen. Wenn Ihr das versuchen möchtet, solltet Ihr das Papierband recht lang machen, sonst gibt es Schwierigkeiten beim Zusammenkleben. Einige Beispiele für Experimente:

- Was geschieht, wenn man das ursprüngliche Möbiusband, nachdem man es längs der Mittellinie zerschnitten hat, noch einmal längs der Mittellinie zerschneidet?
- Was geschieht, wenn man vor dem Zusammenkleben das Band anderthalbmals, zweimal, ... dreht?
- In dem Buch *Mathematik und Magie* von Martin Gardner findet man zahlreiche schöne Tricks, die man mit komplizierteren Möbiusbändern ausführen kann [11, Die afghanischen Bänder, S. 92–98].
- In dem Buch *Mathematische Hexereien*, welches ebenfalls von Martin Gardner stammt, findet man eine interessante Abwandlung unseres Möbiusbandes mit sehr überraschenden Eigenschaften [9, S. 142]. Das linke Gebilde in Abbildung 11 besteht aus zwei aneinandergeklebten Bändern. Was geschieht, wenn wir es entlang der gestrichelten Linie aufschneiden? Noch überraschender wird es, wenn wir das linke Gebilde betrachten. Eines der beiden Bänder ist nach Art eines Möbiusbandes gedreht. Was erwartet Ihr, was beim Aufschneiden geschieht? Probiert es doch einmal zu Hause aus!

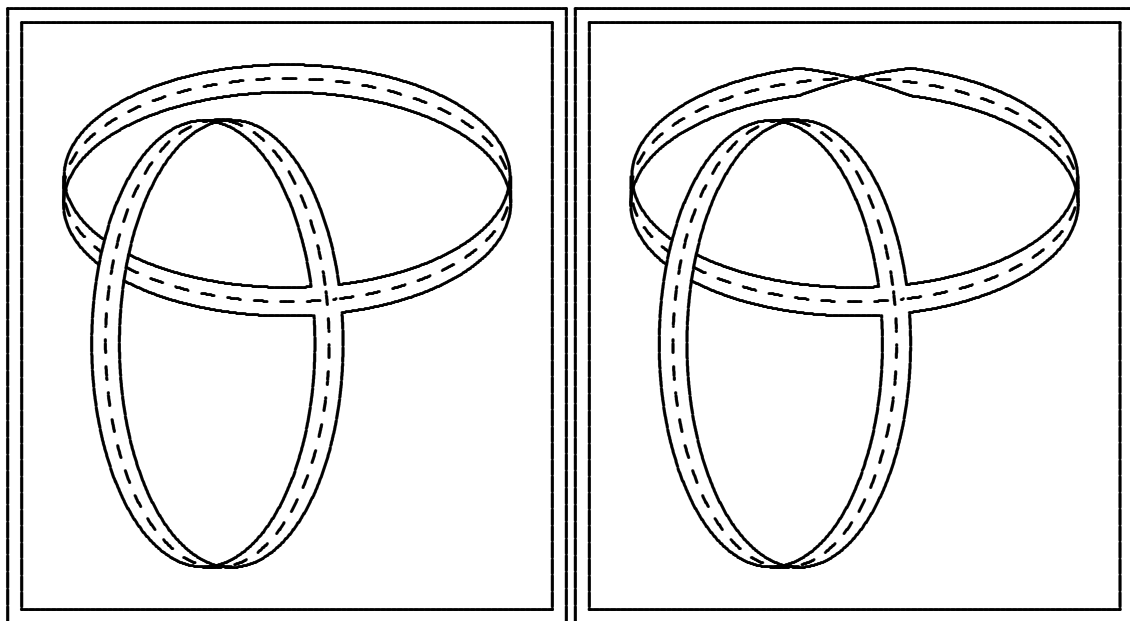


Abbildung 11: Die Gebilde von Gardner.

9 Affen, die auf Tigern reiten

A: Du hattest schon einmal erwähnt, welche Eigenschaften ein Mathematiker haben sollte. Kannst Du noch weitere Eigenschaften nennen?

G: Ein Mathematiker muß viel lernen, genauso wie Harry Potter in Hogwarts. Er muß neugierig sein, er muß ähnlich wie ein Detektiv alle Eigenschaften eines vorgelegten Problems berücksichtigen und er muß in der Lage sein, auch so zu denken, daß er sich nicht von seinen eigenen Erwartungen in die Irre führen läßt.

A: Was soll das heißen? Kannst Du ein Beispiel geben?

G: Ein sehr schönes Beispiel stammt ebenfalls von dem Magier Alexander Adrion [1, S. 154–156]. Es handelt sich um drei Bilder, zwei davon stellen je einen Tiger dar und eines enthält zwei Affen auf Sätteln. Die Aufgabe lautet nun, die Affen auf den Tigern reiten zu lassen. Dabei ist es nicht erlaubt, die Bilder weiter zu zerschneiden. Wie man schnell sieht, ist dies nicht einfach, wenn man den einen Affen rittlings auf den einen Tiger setzt, dann bleibt kein Platz für den zweiten Tiger². Was ist also zu tun?

A: Was würde ein Mathematiker tun?

G: Das, was ein Mathematiker am liebsten tut: Erst einmal nichts! Beziehungsweise, ein Mathematiker würde nachdenken. Wenn es nicht auf die naheliegende Weise geht, dann geht es entweder überhaupt nicht oder aber man macht es auf eine nicht naheliegende Weise. Nach einigem Nachdenken findet man dann heraus, daß man die beiden Tiger Rücken an Rücken legen muß und die Affen dazwischen.

10 In einem Zug

G: Nun wollen wir uns einem anderen Spiel zuwenden. Der schon erwähnte Autor von *Alice im Wunderland* [6, 5], Lewis Carroll, war Professor für Mathematik, der auch „seriöse“ Fachbücher geschrieben hat. Er erzählte kleinen Mädchen aus seiner Bekanntschaft gern mathematische Geschichten und führte kleine Tricks vor.

A: Warum Mädchen?

G: Nun, Mädchen eignen sich besser für Mathematik als Jungen, sie sind – normalerweise – ordentlicher, sorgfältiger und sie halten Spielregeln ein. Ihr wißt sicher, daß Hermine in Harrys Klasse genau aus den von mir genannten Gründen die Beste ist.

Nun zu einem Spiel von Lewis Carroll. Er zeichnete eine einfache Figur (siehe Abbildung 12, [10, S. 95–97]) und bat, diese in einem Zug nachzuzeichnen, wobei gefordert wird, daß die gezeichnete Linie sich nicht selbst überkreuzt. Wohlgemerkt, jede Linie der Figur soll dabei einmal und nur einmal durchlaufen werden. Einzelne Punkte dürfen beliebig oft getroffen werden, der Weg darf sich nur nicht kreuzen. Wenn ich Euch jetzt einige Minuten Zeit ließe, könntet Ihr sicher herausfinden, ob das möglich ist und wie man das macht.

Nun sind Mathematiker recht faule Menschen, sie handeln nicht gern, sie denken nur darüber nach, was sie täten, wenn sie handeln würden. Dies ist auch der Grund, warum Mathematiker nicht wirklich zaubern, sie wollen nur wissen, wie das geht. Auch hier, in unserem Beispiel, ist dies so.

A: Was wir jetzt benötigen, ist eine gute Idee, die uns die mühsame Probiererei erspart.

²Für diejenigen, die das Buch von Alexander Adrion nicht besitzen, sei auf die Internetseite <http://britton.disted.camosun.bc.ca/trickmules.pdf> verwiesen, von der man ein ganz ähnliches Spiel herunterladen kann.

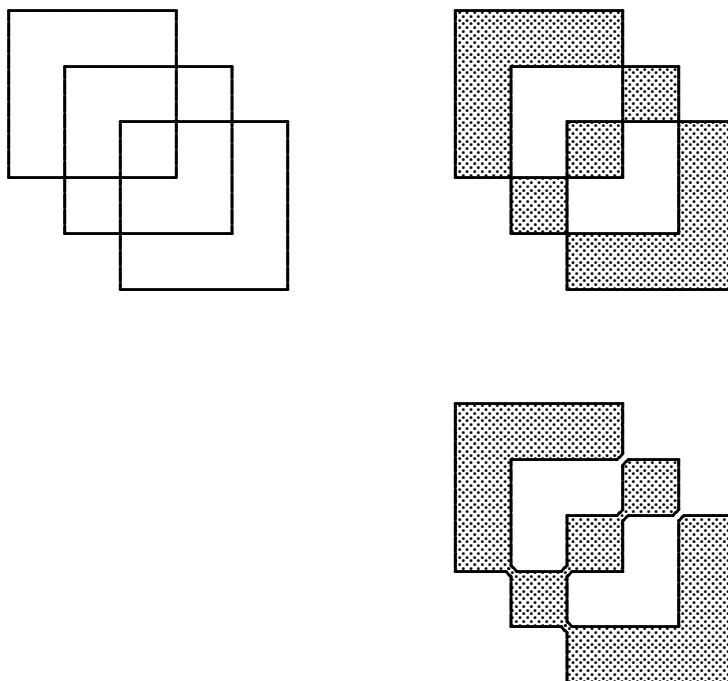


Abbildung 12: Lewis Carolls Problem mit drei Quadraten

G: Eine solche Idee wäre es, die Figur auszumalen, so daß jede durch die Linien gebildete Fläche entweder ausgemalt ist oder frei bleibt und zwei über eine Linie angrenzende Flächen niemals beide ausgemalt sind oder beide freigeblieben. Dabei soll jede Linie der Figur eine ausgemalte Fläche beranden. Wenn man einfach anfängt, dann sieht man, daß dies ohne Schwierigkeiten geht. Nun vergessen wir die Linien und versuchen, den Rand der ausgemalten Fläche in einem Zuge und überkreuzungsfrei nachzuziehen.

A: An den Kreuzungspunkten hat man aber die Wahl, beispielsweise rechts oder geradeaus oder links zu gehen.

G: Richtig, um an jedem Kreuzungspunkt eine eindeutige Entscheidung zu finden, mögeln wir ein ganz klein wenig.

A: Darf man das denn in der Mathematik?

G: Schon, man muß nur im Gedächtnis behalten, wo man gemogelt hat und man muß sich hinterher überlegen, ob dies etwas ausgemacht hat oder nicht.

Wir stellen uns vor, daß die ausgemalte Fläche eine Insel sei. Wir wollen zunächst, daß eine Figur entsteht, die keine „Binnenseen“ hat, das heißt, nicht ausgemalte Flächen, die keinen Zugang zum umgebenden Meer haben. Dazu radieren wir etwas von denjenigen Kreuzungspunkten weg, die die freie Durchfahrt behindern. Dabei müssen wir aufpassen, daß es bei einer Insel bleibt. Wenn wir zu viele Kreuzungspunkte wegradieren, zerfällt die Insel in mehrere Inseln. Wer genau hinsieht, wird bemerken, daß diese Mogelei auf verschiedene Weisen geht. Wir legen uns aber

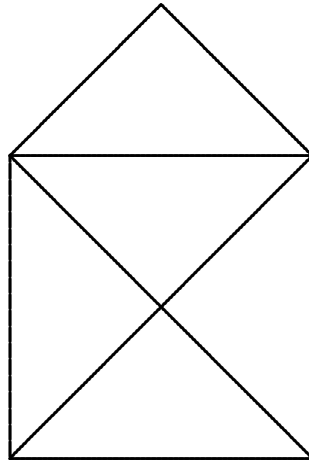


Abbildung 13: Dies ist das Haus vom Nikolaus.

jetzt auf eine davon fest. Die restlichen Kreuzungspunkte machen wir ein wenig dicker, so daß immer nur eine eindeutige Entscheidung über die Randlinie möglich ist.

A: Das ist alles viel einfacher im Bild zu sehen, als in Deiner komplizierten Beschreibung. Es ist für die „gemogelte“ Figur ganz einfach, den Rand in einem Zuge zu umfahren. Man folgt dazu nur der „Küstenlinie“ der Insel. Damit hat man aber auch eine Lösung für die ursprüngliche Figur gefunden, man muß nur die „Mogeleien“ wieder rückgängig machen.

G: So einfach war das! Ein Mathematiker hört hier auf, er wird nicht versuchen, den Weg wirklich anzugeben, da er ja überzeugt ist, daß die Methode richtig ist. Was an diesem kleinen Beispiel interessant ist, sind die Fragen, die ich gar nicht aufgeworfen habe:

- Kann man jede Figur wie beschrieben ausmalen? Offenbar nicht, denn sonst wäre jede noch so komplizierte Anordnung von Linien in einem Zuge nachzeichnenbar, und das ist doch wohl nicht wahr! Wir kennen alle die bekannte Figur „das Haus vom Nikolaus“ (siehe Abbildung 13). Bei dieser funktioniert die Methode nicht. Warum? Nun, bei dieser Figur gelten andere „Spielregeln“, es dürfen sich die Linien überkreuzen, und dann ist alles ganz anders.
- Durch meine „Mogeleien“ ändere ich die Aufgabe. Das heißt, ich nehme eine nicht ganz einfache Aufgabe her und ändere sie so, daß sie einfach wird. Darf ich das?
- Kann man das immer so machen? Damit Ihr testen könnt, ob Ihr alles verstanden habt, versucht doch einmal, die Figur aus vier Kreisen in Abbildung 14 nach dieser Methode in einem Zuge nachzuzeichnen. Diese Figur stammt von T. H. O’Beirne [10, S. 94]. Eine kompliziertere Figur findet man in einem Buch von Wolff [24, S. 180] (Abbildung 15).

11 In drei Zügen

G: Es gibt eine sehr schöne Aufgabe, die ich in einem alten Buche fand [24], und die auf einem recht gemeinen Trick beruht. Mit dieser Aufgabe kann man selbst erfahrene Erwachsene, die sonst

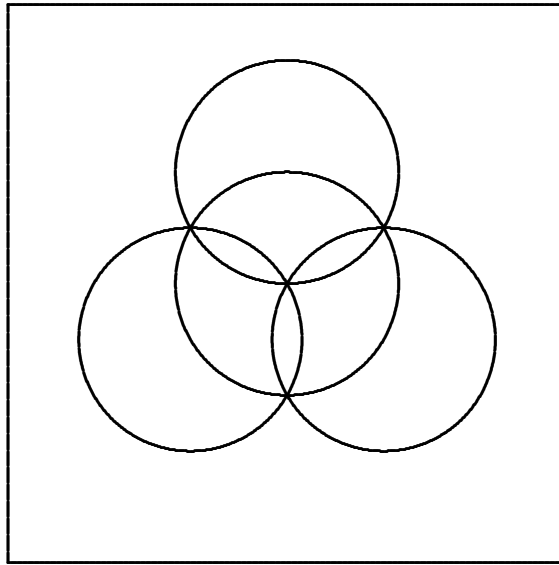


Abbildung 14: O'Beirnes Problem mit vier Kreisen

alles wissen, verblüffen.

A: Eine solche Aufgabe möchte ich sehr gern kennenlernen, vielleicht kann ich dann meinen Großvater verblüffen.

G: In Abbildung 16 ist eine Figur gezeichnet. Die Frage ist, ob man diese Figur in drei Zügen zeichnen kann, nach unseren Spielregeln, das heißt jede Linie muß einmal nachgezogen werden, aber auch nur einmal. Der Stift darf dabei höchstens zweimal abgesetzt werden.

A: Geht das denn überhaupt? Schauen wir uns doch einmal die Figur näher an. Sie enthält eine Anzahl von Punkten, in denen sich drei Linien treffen. Betrachten wir den obersten dieser Punkte (Abbildung 17). Wenn man bei einem Zuge auf irgendeiner der drei Linien zu dem Punkt kommt, dann muß es auf einer der anderen Linien weitergehen, wenn man nicht in dem betreffenden Punkt aufhören will. Nehmen wir etwa an, wir kämen von links. Dann können wir entweder aufhören oder geradeaus weitergehen oder aber uns nach unten wenden. Wenn wir nicht aufhören, dann haben wir zwei Linien „verbraucht“, es bleibt nur eine übrig. Diese kann nur entweder der Start eines neuen Zuges sein oder aber das Ende eines Zuges.

G: Das ist richtig, aber was soll uns da nützen?

A: Wir haben in unserem Bild insgesamt acht solcher Dreifachpunkte. Wir hatten eben gesehen, daß in jedem solchen Punkt ein Zug beginnen oder enden muß. Richtig?

G: Ja, schon, was können wir daraus schließen?

A: Daß die Aufgabe nicht lösbar ist! Jeder Zug hat einen Anfangs- und einen Endpunkt. Da wir aber acht Dreifachpunkte haben, und da jeder dieser Punkte höchstens einmal als Anfangs- oder Endpunkt auftreten darf, benötigen wir mindestens vier Züge, und man sieht sehr schnell, daß vier Züge auch genügen. Also hat Dein altes Buch Dir eine unlösbare Aufgabe gestellt!

G: Nebenbei bemerkt, das war soeben eine Kostprobe von mathematischer Arbeit. Häufig muß man zeigen, daß eine Aufgabe **nicht** lösbar ist, und das ist meistens schwieriger, als eine Lösung

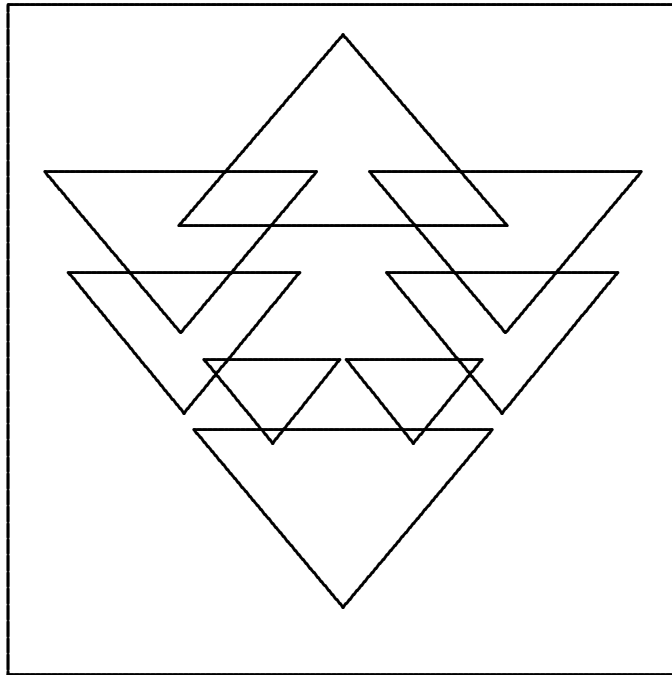


Abbildung 15: Auch diese Figur läßt sich überkreuzungsfrei in einem Zuge zeichnen.

für eine lösbare Aufgabe zu finden. Die Mathematik hat uns gesagt, daß es keine Lösung gibt. Unser trickreicher „gesunder Menschenverstand“ muß uns jetzt auf andere Weise weiter helfen.

A: Heißt das, wir müssen jetzt mogeln?

G: Ja, denn anders geht es hier nicht!

A: Da bin ich jetzt aber gespannt!

G: Wir müssen mit einem Zug zwei End- und zwei Anfangspunkte gleichzeitig erzeugen. Dann stimmt alles wieder. Um dies zu erreichen, falten wir das Papier durch zwei Querfaltungen so, wie in Abbildung 18 dargestellt. Wenn wir jetzt einen Strich über die Doppelfalte ziehen und das Papier auseinanderfalten, dann haben wir zwei getrennte horizontale Striche. Der beiden restlichen Züge sind dann ganz einfach, wie in Abbildung 19. Die beiden auf die beschriebene Weise erzeugten Striche sind schwarz dargestellt. Man kann dann leicht den blauen und den grünen Teil der Figur in je einem Zuge zeichnen.

Es gibt noch einen zweiten Trick, bei dem man das Zeichenpapier zu einem Rohr verbiegt, so daß sich der äußerste linke und der äußerste rechte Punkt der Figur berühren. Wenn man das getan hat, dann kann man die Figur wieder in drei Zügen zeichnen, wobei einer der Züge vom linken Ende der Figur „hintenherum“ zum rechten Ende gelangt. Auf dem zu einem Rohr gebogenen Zeichenblatt kann man auch unseren Doppelstrich, mit dem wir oben die Lösung mittels Mogelei gefunden haben, leicht erzeugen. Man zeichnet eine gerade Linie über die Stelle, an der sich die beiden Enden berühren. Dies sollte man in Ruhe zu Hause ausprobieren, es ist etwas schwerer vorstellbar, als unser Mogeltrick.

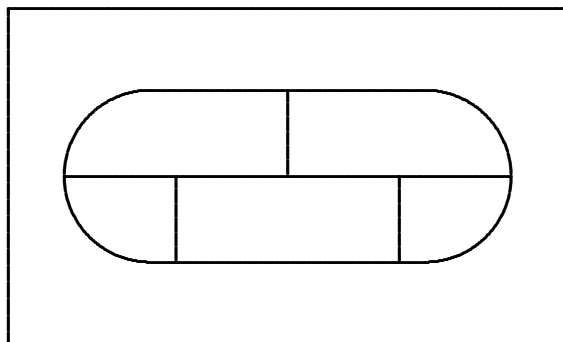


Abbildung 16: Kann man diese Figur in drei Zügen zeichnen?

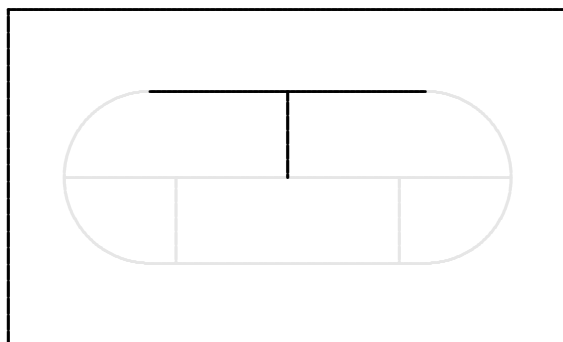


Abbildung 17: Ein Punkt, in dem sich drei Linien treffen.

12 Das Problem der Königsberger Brücken

G: Die Lösung einer ganz berühmten Aufgabe wird dem großen Mathematiker Leonhard Euler zugeschrieben, der von 1707 bis 1783 lebte. Die Stadt Königsberg liegt an dem Fluß Pregel. Durch den Fluß wird die Stadt in vier Teile geteilt. Zwischen den einzelnen Stadtteilen gibt es sieben Brücken, wie in Abbildung 20.a) dargestellt ist. Es war nun im Jahre 1736 – also vor über 250 Jahren – die Aufgabe gestellt worden, einen Spazierweg durch Königsberg zu finden, der über jede der Brücken führt, dabei darf aber keine mehr als einmal überschritten werden.

A: Man könnte jetzt einen Stift nehmen und einfach ausprobieren, ob man einen solchen Spazierweg finden kann.

G: Das ist schon richtig. Wenn es einen solchen Weg gibt, dann wird man ihn auch sicherlich irgendwann durch Probieren finden. Allerdings, man muß unter Umständen, je nach Geschick, schon eine große Zahl von möglichen Wegen untersuchen. Außerdem halten wir Mathematiker eine Lösung, die durch einfaches Ausprobieren gefunden wird, für nicht besonders schön. Und was ist, wenn es *keinen* solchen Weg gibt? Das könnte man auf diese Weise niemals herausfinden.

A: Ja, natürlich, wenn ich nach einige Zeit keine Lösung gefunden habe, könnte es ein, daß es keine gibt, oder aber, daß ich mich vielleicht sehr ungeschickt angestellt habe, und die Lösung nicht gesehen habe. Aber Du hast Leonhard Euler erwähnt. Der hat doch sicher eine gute Idee gehabt!

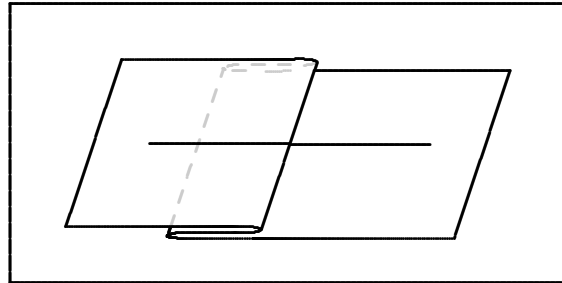


Abbildung 18: Trick zur Lösung der Aufgabe.

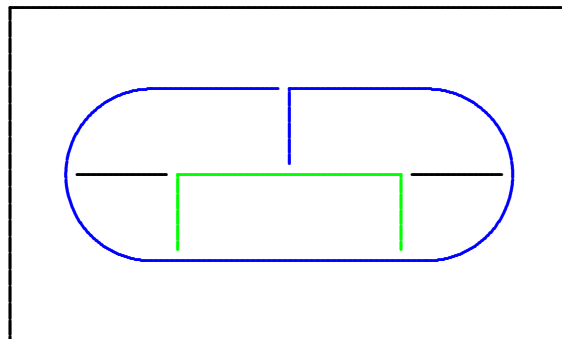


Abbildung 19: Lösung der Aufgabe.

G: Ja, natürlich. Schließlich war Euler einer der größten Mathematiker seiner Zeit. Er hat nachgedacht und dabei zuerst einmal festgestellt, daß es bei dieser Aufgabe nicht darauf ankommt, wie man genau sich in den Stadtteilen bewegt, ob man auf geradem Weg der Brücke zueilt oder längs gewisser Straßen geht oder aber vielleicht noch einen kleinen Rundgang einlegt. Wirklich wichtig ist nur, über welche Brücke man schließlich den Fluß überquert.

A: Das ist ja klar. Man könnte also gleich so tun, als könne man geradlinig von einem Punkt aus zu der nächsten Brücke laufen. Dadurch wird die Aufgabe wesentlich übersichtlicher.

G: In Abbildung 20.b) sind die möglichen geraden Wege von einem festen Punkt eines jeden Stadtteils zur jeweils nächsten Brücke eingezeichnet. Als zweite Überlegung: Es ist nun nicht mehr so wichtig, wie der Fluß zwischen den Brücken genau verläuft, wir können ihn uns also auch „wegdenken“ (Abbildung 20.c)).

A: Jetzt können wir auch noch die geknickten Wege durch gerade Linien ersetzen, wir müssen uns nur merken, daß zu jeder geraden Linie in Abbildung 20.c) eine Brücke gehört. Damit erhalten wir die nun schon sehr übersichtliche Abbildung 20.d).

G: Betrachten wir nun einmal den Punkt 4 der Abbildung. In diesen Punkt münden drei Wege ein, das heißt, dieser Stadtteil ist über drei Brücken mit den anderen Stadtteilen verbunden. Wenn wir „irgendwie“ zu diesem Stadtteil kommen, dann haben wir eine Brücke überschritten. Wenn wir dann den Stadtteil verlassen, dann ist das nur über eine zweite Brücke möglich. Es verbleibt also nur noch eine Brücke, die noch nicht benutzt wurde. Wenn wir diese irgendwann benutzen, dann sind wir auf dem Stadtteil 4 „gefangen“, denn alle drei Brücken wurden dann schon benutzt.

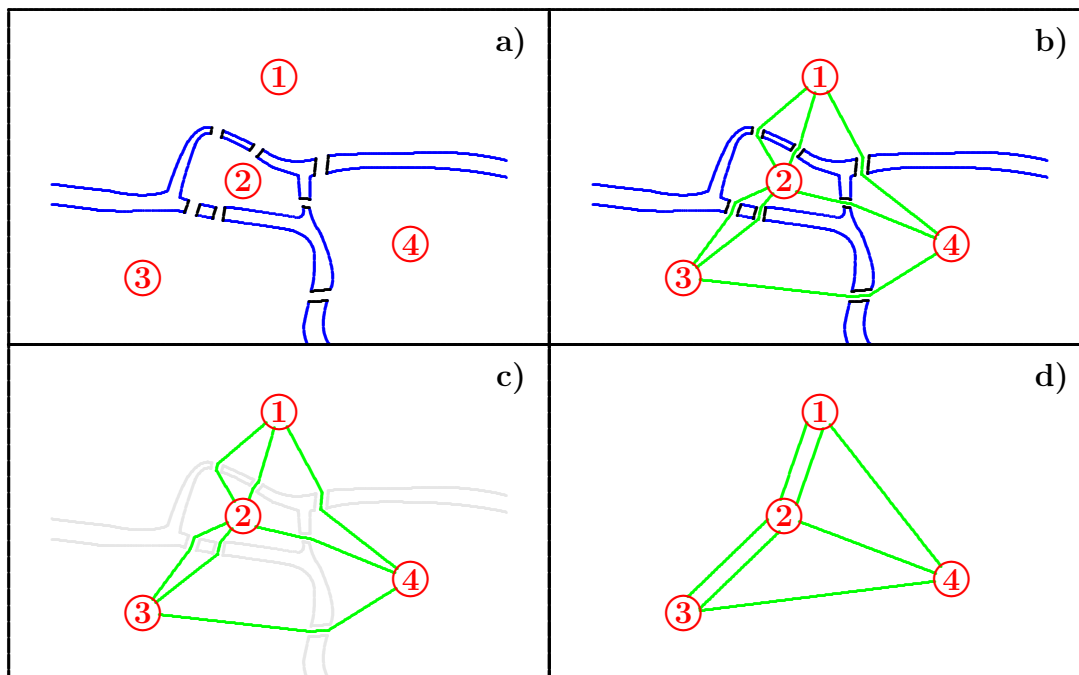


Abbildung 20: Das Königsberger Brückenproblem.

- a) Der Fluß Pregel teilt die Stadt Königsberg in vier Stadtteile, die mit den Ziffern 1 bis 4 bezeichnet sind. Zwischen den Stadtteilen gibt es insgesamt sieben Brücken.
- b) Die Wege zwischen den Stadtteilen über die sieben Brücken.
- c) Schema der Wege, Fluß und Brücken ausgeblendet.
- d) Gleiches Schema mit begradigten Wegen.

Man könnte sich natürlich vorstellen, daß unsere Wanderung im Stadtteil 4 begann. In diesem Falle hätten wir keine Probleme: Wir könnten den Stadtteil auf einer Brücke verlassen, auf einer anderen wieder betreten und dann auf der dritten verlassen, und danach brauchten wir ihn nicht mehr aufzusuchen.

A: Also: Der Stadtteil 4 kann nur Anfangs- oder als Endpunkt unserer Wanderung sein.

G: Richtig! Nun schauen wir uns die anderen Stadtteile an. Die beiden Stadtteile 1 und 3 sind ebenfalls nur über jeweils drei Brücken erreichbar, Stadtteil 5 über fünf Brücken.

A: Und schon sehen wir, daß die Aufgabe nicht lösbar sein kann. Der Anfangs- oder der Endpunkt muß in 1, 3 oder 4 liegen, es gibt aber nur einen Anfangs- und einen Endpunkt. Wir haben also einen Stadtteil, welcher über drei Brücken erreichbar ist, zuviel!
Ganz schön klug, dieser Euler!

13 In einem Irrgarten

A: In dem Buch *Harry Potter und der Feuerkelch* nimmt Harry Potter am trimagischen Turnier teil. Als dritte Aufgabe muß er sich in einem Irrgarten zurechtfinden. [17, S. 633 ff]. Haben etwa Irrgärten auch etwas mit Mathematik zu tun?

G: Wir Mathematiker lieben Irrgärten aus verschiedenen Gründen, und ich möchte noch einige Worte über Irrgärten sagen.

In Abbildung 21 ist ein sehr einfacher Irrgarten dargestellt. Es ist hier nicht schwierig, den Weg vom Start zum Ziel zu finden. Eine einfache Regel, die man oft in Artikeln über Irrgärten findet, ist es, im Zweifel immer in eine bestimmte Richtung abzubiegen, das heißt entweder, an jeder Verzweigung grundsätzlich die rechte Möglichkeit zu wählen oder aber immer die linke. In Abbildung 22 ist die letztgenannte Möglichkeit dargestellt.

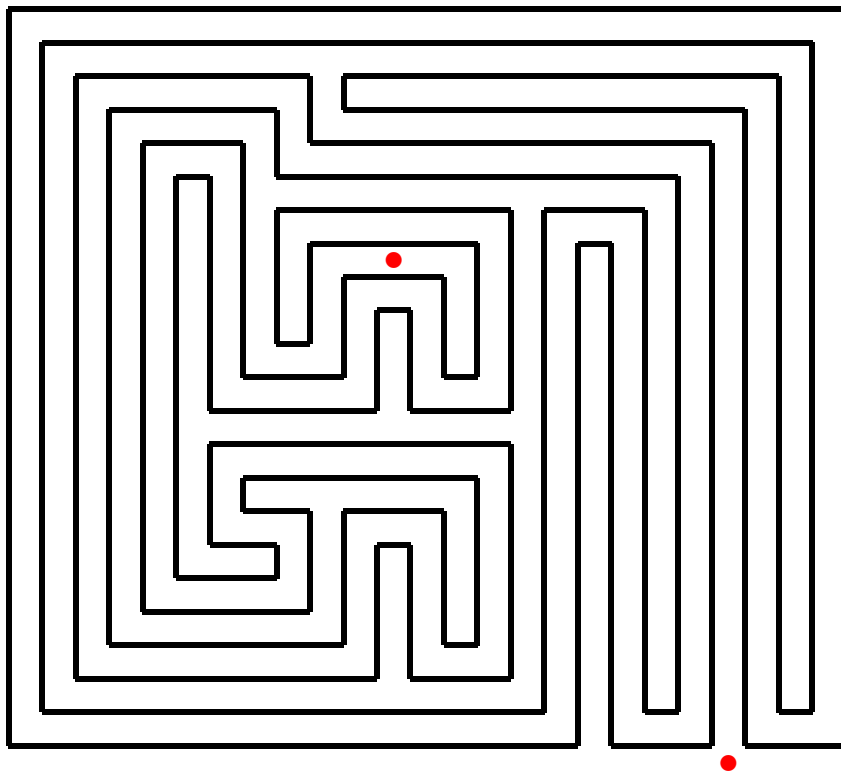


Abbildung 21: Ein einfacher Irrgarten – Start und Ziel sind durch je einen roten Punkt markiert.

A: Funktioniert die Methode „immer links“ denn immer?

G: Es gibt Irrgärten, bei denen man auf diese Weise nicht zum Ziel kommt. Einer dieser Irrgärten ist das sogenannte Heckenlabyrinth von Chevening in der englischen Grafschaft Kent. Es wurde von Charles Stanhope, dem 3. Earl Stanhope (1753 – 1816), der sich intensiv mit Mathematik beschäftigt hatte, entworfen und um 1820 realisiert [23]. In Abbildung 23 ist dieser komplizierte Irrgarten (oder Labyrinth) dargestellt.

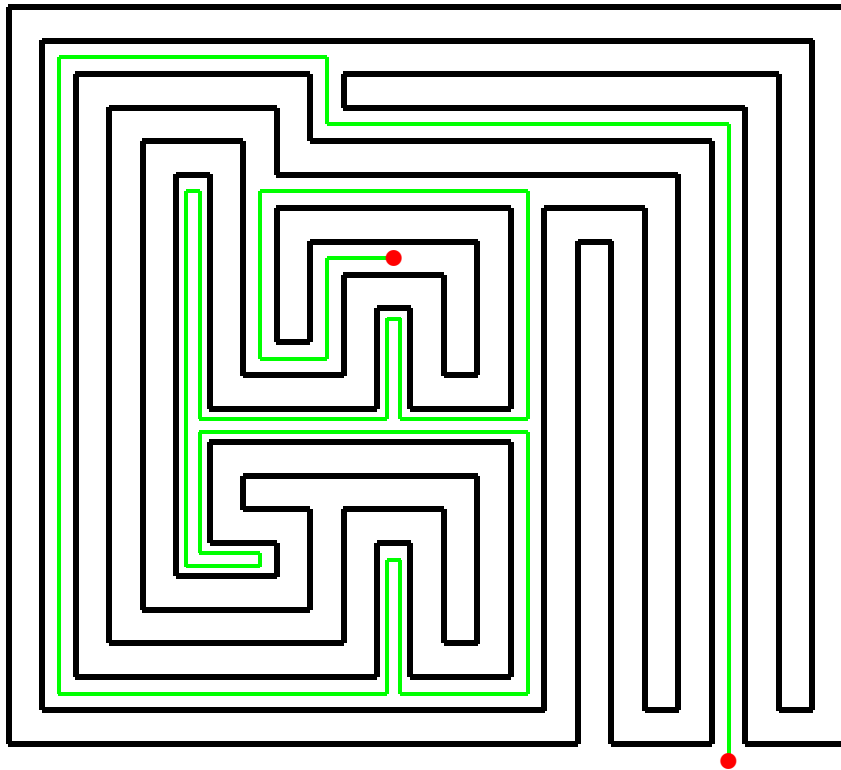


Abbildung 22: Ein einfacher Irrgarten – Anwendung der Regel „immer links“.

Wählen wir die Strategie „immer links“, die uns bei dem einfachen Irrgarten so gut geholfen hat, dann kommen wir immerhin wieder aus dem Labyrinth heraus, ohne allerdings den Zielpunkt gefunden zu haben (Abbildung 24). Ähnlich ergeht es uns, wenn wir die Strategie „immer rechts“ wählen. Daß es tatsächlich einen Weg vom Start zum Ziel gibt, sieht man in Abbildung 25.

Was macht dieses Heckenlabyrinth so kompliziert? In Abbildung 26 sind einmal die zusammenhängenden Stücke der begrenzenden Hecke farbig unterschieden. Man sieht, daß die Hecke aus sieben Teilen oder „Inseln“ besteht. Wendet man die Strategie „immer links“ oder auch „immer rechts“ an, dann umrundet man den in der Abbildung violett dargestellten Teil und gelangt niemals zu dem schwarz dargestellten Teil der Hecke, in dem ja das Ziel liegt.

Übrigens: Auch für solch komplizierte Irrgärten wie das Heckenlabyrinth von Chevening gibt es Methoden, von Start zum Ziel (und wieder zurück) zu kommen. Solche Methoden sind natürlich etwas komplizierter als die geschilderte einfache Strategie.

14 Die Weinkrugaufgabe

G: Es gibt eine sehr hübsche Aufgabe, die schon sehr alt ist und die auch bei „ernsthaften“ Wissenschaftlern beliebt ist. Die Informatiker testen ihre Ansätze zur sogenannten „künstlichen

Intelligenz“ gern an einfachen Spielproblemen. Wenn ein „intelligentes“ Computerprogramm zur Lösung von allgemeinen Aufgabenstellungen funktionieren soll, dann muß es solche Aufgaben lösen können. Auf der anderen Seite kann man bei dem Versuch, ein Computerprogramm zur Behandlung von solchen „Spielproblemen“ zu schreiben, viel darüber lernen, wie man auch schwierigere Probleme lösen könnte.

A: Das heißt, wer Mathematik oder Informatik studiert, darf spielen.

G: So kann man es schon sagen. Doch nun zu unserer Aufgabe. Der Abt Albert (man weiß nur, daß er im Jahre 1265 – also vor über siebenhundert Jahren – starb) hat in seinem Buche *Annales Stadenses* die folgende kleine Geschichte erzählt [3, Kapitel IV. Umfüllungsaufgaben]:

Ein Diener wird von seinem Herrn in die nächste Stadt geschickt, um 8 Maß Wein zu holen. Als er kaum mit seinem gefüllten Gefäß die Stadt verlassen hat, begegnet ihm ein zweiter Diener, der für seinen Herrn gleichfalls Wein holen soll. „Wieviel Wein hast Du?“ fragt dieser jenen. — „8 Maß“. — „Ich soll auch Wein holen.“ — „Du wirst keinen bekommen, da keiner mehr da ist.“ Nun bittet der zweite Diener den ersten, seinen Wein mit ihm zu teilen; er habe zwei Gefäße, eins von 5, das andere von 3 Maß bei sich. — Wie läßt sich unter alleiniger Benutzung dieser drei Gefäße die Teilung ausführen?

Es gibt zu dieser Aufgabe eine sehr hübsche Geschichte [3, S. 107]: Ein junger Franzose machte seinen Eltern große Sorgen. Was immer er anfang, es mißglückte. Ursprünglich sollte er den ehrsamten Beruf eines Notars ergreifen, aber er stellte sich derart töricht dabei an, daß man zweifeln mußte, ob sein Verstand für derlei ausreichen würde. Man gab ihn also zu einem Verwandten in die Lehre, damit er Chirurgie lerne. Doch es stellte sich heraus, daß er derart ungeschickt war, daß man ihn auch für diesem Beruf nicht brauchen konnte. Zufällig zeigte ihm jemand die Weinkrugaufgabe, und es heißt, daß er die Lösung „auf Anhieb“ fand, ohne überhaupt lange nachzudenken. Damit wurde klar, daß er für Mathematik wie geschaffen war. Sein Name ist heute jedem Mathematiker bekannt, es war Simeon Denis Poisson, er lebte von 1781 bis 1842 und gehört zu den ganz großen Mathematikern.

A: Also, wenn man für alles zu dumm oder zu ungeschickt ist, sollte man Mathematiker werden! Aber zurück zur Aufgabe. Wir sollten sie vielleicht erst einmal deutlich formulieren. Dazu machen wir uns eine Zeichnung (Abbildung 27). Wir müssen also durch Umfüllen von Wein in die vorhandenen Krüge schließlich einen Zustand erreichen in dem in dem 8l-Krug und dem 5l-Krug sich je vier Liter Wein befinden. Das könnte man durch Probieren erreichen.

G: Man kann die Aufgabe auch durch ein systematisches und intelligentes Verfahren lösen. Auf jeden Fall sind die meisten Züge, die man sinnvollerweise ausführen kann, ziemlich klar vorgegeben. Wie sollte der erste Schritt verlaufen? Es gibt zwei sinnvolle Möglichkeiten, man kann den 8l-Krug in den 3l-Krug entleeren oder aber in den 5l-Krug. Was schlägst Du vor?

A: Versuchen wir es mit dem 5l-Krug.

G: Gut, wir erhalten dann folgende Situation : Im 8l-Krug befinden sich noch 3l, im 5l-Krug 5l und der 3l-Krug ist leer. Wir schreiben dies so:

3l im 8l-Krug 5l im 5l-Krug 0l im 3l-Krug (das heißt, der 3l-Krug bleibt leer)

Was sollten wir als nächstes tun?

A: Den Wein aus dem 5l-Krug wieder zurückzuschütten ist wohl kaum sinnvoll. Wenn man den Rest des 8l-Kruges in den 3l-Krug entleert, dann hat man in diesem 3l, und das sieht nicht sehr erfolgversprechend aus, denn danach muß man entweder den 3l-Krug oder den 5l-Krug in den 8l-Krug entleeren, und das scheint mir nicht hilfreich zu sein. Füllen wir also den 3l-Krug aus dem 5l-Krug.

G: Damit hätten wir

3l im 8l-Krug 2l im 5l-Krug 3l im 3l-Krug

A: Hier könnten wir den 5l-Krug in den 8l-Krug entleeren, dann hätten wir dort 5l und das wäre fast die gleiche Situation, die wir eben ausgeschlossen hatten, ebenso, wenn wir den 3l-Krug in den 5l-Krug entleeren. Versuchen wir es einmal damit, den 3l-Krug in den 8l-Krug zu gießen.

G: Das ergibt:

6l im 8l-Krug 2l im 5l-Krug 0l im 3l-Krug

A: Den 3l-Krug aus dem 8l-Krug wieder zu füllen, ist nicht besonders klug. Die 2l des 5l-Kruges in den 8l-Krug zu gießen, ist auch keine gute Idee. Gießen wir diese 2l doch in den 3l-Krug.

G: Wir haben also jetzt:

6l im 8l-Krug 0l im 5l-Krug 2l im 3l-Krug

A: Jetzt wird es schon klarer: Wir füllen den 5l-Krug aus dem 8l-Krug.

G: Und wir erhalten:

1l im 8l-Krug 5l im 5l-Krug 2l im 3l-Krug

A: Wenn wir jetzt den 3l-Krug aus dem 5l-Krug füllen, dann bleiben in dem letzteren gerade 4l übrig, und das sieht sehr gut aus.

G: In der Tat:

1l im 8l-Krug 4l im 5l-Krug 3l im 3l-Krug

A: Nun sind wir fertig, wir müssen nur noch den 3l-Krug in den 8l-Krug entleeren!

G: Geschafft!

Es gibt übrigens zwei Lösungen. Die zweite hätten wir erhalten, wenn wir anfangs den 3l-Krug aus dem 8l-Krug gefüllt hätten. ich gebe die beiden Lösungen der Vollständigkeit halber in Tabellenform an:

Lösung 1:

8l-Krug	5l-Krug	3l-Krug
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

Lösung 2:

8l-Krug	5l-Krug	3l-Krug
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

15 Geschäfte mit Betrügern

G: Es gibt eine große Anzahl von sehr hübschen Aufgaben, und man kann sie in zahlreichen Büchern nachschlagen. Einige dieser Bücher sind im Literaturanhang angegeben.

Eine Aufgabe, die immer wieder für Verwirrung sorgt, fand ich in dem Buch von Wolff [24, S. 158]:

Zu einem Juwelier kam ein Herr, der ein Armband zu kaufen wünschte. Der Juwelier legte ihm mehrere Stücke zur Auswahl vor, und der Herr entschied sich schließlich für ein Armband im Preise von 60 Mark (oder Euro oder Ententaler, wie Ihr wollt). Zur Bezahlung gab er dem Juwelier einen Hundertmarkschein. Der Juwelier hatte kein Kleingeld in der Kasse und schickte daher den Lehrling mit dem Hundertmarkschein zum Nachbar mit der Bitte, den Schein zu wechseln. Der Lehrling kam mit dem Wechselgeld zurück, der Juwelier packte dem Käufer das Armband ein, gab ihm auf die gezahlten 100 Mark noch 40 Mark heraus, und der Käufer verließ den Laden. Nach einer Stunde kam jedoch der Nachbar, der den Hundertmarkschein gewechselt hatte, behauptete, daß der Hundertmarkschein falsch wäre und verlangte Ersatz. Der Juwelier überzeugte sich von der Richtigkeit der Behauptung und mußte dem Nachbar schweren Herzens die 100 Mark zurückzahlen. Wie groß war der gesamte Schaden, den der Juwelier bei dem Geschäft gehabt hatte.

A: Fragen wir doch einmal das Publikum!

...

G: Tatsächlich hat der Juwelier einen Schaden von genau 100 Mark. Man kann folgende Rechnung aufstellen – dabei machen wir es ähnlich wie die Buchhalter, links in schwarz die Einnahmen des Juweliers, rechts in rot die Ausgaben (beziehungsweise die Verluste):

	Einnahme	Verlust
Falscher Hundertmarkschein	0.00	
Einnahme (vom Nachbarn geliehenes Geld)	100.00	
Wert des Armbands		60.00
Wechselgeld an den Kunden		40.00
Rückerstattung an den Nachbarn		100.00
Summe	100.00	200.00
Gesamtverlust		100.00

G: Eine ähnliche Aufgabe findet man bei Gardner [9, S. 146]:

Smith bezahlte einem Hotelangestellten für eine Übernachtung \$ 15. Als der Mann entdeckte, daß er \$ 5 zuviel genommen hatte, schickte er einen Pagen mit fünf \$ 1-Scheinen zum Zimmer von Smith. Der unehrliche Page gab Smith nur drei Scheine zurück und behielt die anderen beiden selbst. Smith hatte für sein Zimmer \$ 12 bezahlt. Der Page hatte \$ 2 eingenommen. Das ergibt einen Betrag von \$ 14. Wo blieb der fehlende Dollar?

A: Was meint unser Publikum?

...

Der Witz bei dieser Aufgabe ist, daß zwei Zahlen addiert werden, deren Summe keine Bedeutung hat. Wir machen wieder eine Gewinn- und Verlustrechnung:

Bilanz	Mr. Smith	Hotelangestellter	Page
Gezahlte Summe	15	15	
Rückgeld		5	5
Rückgabe an Mr. Smith	3		3
Summe	3 15	15 5	5 3
Gesamtbilanz	12	10	2

A: Also ist doch alles in Ordnung. Herr Smith hat \$ 12 bezahlt, davon erhielt der Hotelangestellte \$ 10 und der Page \$ 2. Genau genommen: daß der Page einfach \$ 2 einbehalten hat, ist natürlich nicht in Ordnung!

16 Sudoku

A: Man findet heute in jeder Zeitung Sudokus. Fast immer wird in den Zeitungen darauf hingewiesen: „Ein Mathematik-Ass müssen Sie für Sudoku nicht sein – cleveres Kombinieren ist hier gefragt“. Kann man also sagen, daß Sudokus nichts mit Mathematik zu tun haben?

G: Im Gegenteil! Ich weiß nicht, was sich die Journalisten unter Mathematik vorstellen, jedenfalls ist „cleveres Kombinieren“ eine sehr gute Beschreibung mathematischer Tätigkeit. Es gibt sehr ernsthafte Mathematiker, die vorschlagen, Sudoku im Mathematik-Unterricht zu behandeln [7, 8]. Was interessiert uns Mathematiker an einem solchen Spiel? Nun, einmal kann man hier sehr schön studieren, wie man Regeln zur Lösung finden kann. Noch interessanter ist es, sich zu fragen, ob diese Regeln immer zum Ziel führen.

Man könnte sich etwa vornehmen, ein Programm zu entwerfen, welches Sudokus löst. Wenn man weiß, wie ein solches Programm aussehen würde, dann wäre es nicht mehr sehr spannend, ein soches Programm wirklich zu schreiben. Stellt Euch vor, Harry Potter wüßte einen Zauberspruch, der bewirkt, daß ein Sudoku oder ein anderes Spiel sofort gelöst würde. Das wäre ja dann recht langweilig, einfach immer nur den Zauberspruch aufzusagen.

A: Ihr kennt sicher alle die Spielregeln des Sudoku. In einem Feld von $9 \times 9 = 81$ Kästchen sind einige dieser Kästchen mit Ziffern zwischen 1 und 9, besetzt. Die noch freien Felder sind so

aufzufüllen, daß in jeder Zeile und jeder Spalte sowie in jedem der markierten Unterquadrate, die aus 3×3 Kästchen bestehen, alle Ziffern von 1 bis 9 genau einmal vorkommen.

G: In Abbildung 28 ist ein solches Sudoku angegeben. Es stammt aus der Zeitung *Times* und wurde als besonders schwer klassifiziert. In diesem Sudoku sind 24 Ziffern vorgegeben, wir haben also $81 - 24 = 57$ Ziffern zu ermitteln.

A: Wie könnte man sich ein Programm, das ein Sudoku löst, vorstellen?

G: Ein Computer ist genau das Gegenteil eines Mathematikers, er ist nicht besonders klug, man muß ihm jeden Schritt vorschreiben, aber er ist ungeheuer fleißig und sehr schnell. Wir weisen unseren Computer nun an, in jedes noch nicht besetzte Feld erst einmal alle Ziffern von 1 bis 9 einzutragen. Danach soll der Computer in jedem solchen Feld alle diejenigen Ziffern löschen, die nach den Sudoku-Regeln in diesem Feld nicht stehen dürfen. Ich möchte diese Methode die *Sherlock-Holmes-Methode* nennen. Sherlock Holmes war häufig recht ungehalten über die Begriffsstutzigkeit seines Partners Dr. Watson. So sagt er in dem Roman *Im Zeichen der Vier* zu Watson:

Wie oft habe ich es Ihnen gesagt, daß, wenn Sie das Unmögliche ausgeschlossen haben, was übrigbleibt, so unwahrscheinlich es auch scheinen mag, die Wahrheit sein muß?

Wir schließen also in unserem Programm erst einmal das Unmögliche aus. In Abbildung 29 ist das Ergebnis dieses ersten Schrittes des Computers dargestellt. Zum Beispiel darf in dem linken oberen Feld keine 2 stehen, denn diese kommt in der linken Spalte bereits vor. Ebenso darf keine 3 in dem Feld stehen, denn in der ersten Zeile finden wir eine 3. Es gibt gleich zwei Gründe dafür, daß in dem linken oberen Feld keine 4 stehen darf: Einmal kommt die 4 schon in dem linken oberen 3×3 -Quadrat und zum anderen in der ersten Spalte vor. Wie man weiter sieht, darf auch keine 6 und keine 7 vorkommen sowie keine 9. Es bleiben also nur die Ziffern 1, 5 und 8.

Auf die gleiche Weise verfahren wir mit den anderen Kästchen. Ich gebe zu, daß dies eine etwas langwierige (und auch langweilige) Methode ist, aber wir denken ja an ein Computerprogramm, und der Computer soll ruhig etwas arbeiten. Worauf es uns ankommt, ist nicht, eine möglichst einfache Methode zu finden, sondern eine Methode, die sicher zur Lösung führt.

Wir schauen uns nun Abbildung 29 genauer an. Als erstes fällt uns auf, daß in der vierten Zeile im ersten Kästchen nur eine einzige Ziffer steht, eine 7. Nach Sherlock Holmes können wir schließen, daß in diesem Kästchen eine 7 stehen muß.

In dem zweiten oberen 3×3 -Quadrat ist nur eine einzige 2 zu finden, nämlich im sechsten Kästchen der ersten Zeile. Das bedeutet aber, daß in diesem Kästchen eine 2 stehen muß. Auch hier argumentieren wir wieder mit Sherlock Holmes: In keinem anderen Kästchen des Quadrats kann eine 2 stehen, also muß das Kästchen, welches übrigbleibt, das wahre Kästchen für die 2 sein.

In Tabelle 1 sind die ersten Schritte zur Lösung des Sudokus aufgelistet. Die einzelnen Kästchen werden durch Angabe der Zeilennummer (von oben nach unten gezählt) und der Spaltennummer (von links nach rechts) nummeriert. So bedeutet das Ziffernpaar (7,2) das zweite Kästchen in der siebten Zeile. Steht in der Tabelle die Bemerkung „einz. Mögl.“ so heißt das, daß für das betreffende Kästchen nur noch eine Möglichkeit für eine Ziffer besteht, so wie eben bei der 7 in der Position (4,1). Die Bemerkung „Quadrat“ bedeutet, daß in einem 3×3 -Quadrat eine Ziffer nur ein einziges Mal auftaucht, so wie eben die 2 in (1,6). Ähnlich bedeutet „Zeile“, daß eine Ziffer in einer Zeile nur einmal vorkommt, ganz analog ist die Bedeutung von „Spalte“.

Nr.	Ziffer	Position		Bemerkungen
1	7	4	1	einz. Mögl.
2	2	1	6	Quadrat
3	3	2	1	Quadrat
4	8	3	7	Quadrat
5	2	4	3	Quadrat
6	8	9	4	Quadrat
7	3	3	9	Quadrat
8	3	8	7	Quadrat
9	2	7	8	Quadrat
10	4	8	9	Quadrat
11	5	8	5	Quadrat
12	2	8	2	Quadrat
13	8	8	1	einz. Mögl.
14	6	8	3	einz. Mögl.
15	7	8	6	einz. Mögl.
16	2	2	7	Quadrat
17	7	7	2	Quadrat
18	5	9	2	Quadrat

Tabelle 1: Die ersten achtzehn Schritte des Times-Sudoku.

Es braucht wohl nicht eigens erwähnt zu werden, daß nach jeder neu gefundenen endgültigen Ziffer unser Computer weitere Ziffern in den noch offenen Kästchen löschen kann. Dies wird hier nicht dargestellt, das wäre dann doch zu langweilig.

In Abbildung 30 ist der Zustand des Sudoku nach dem achtzehnten Schritt dargestellt. Wir sehen uns hier die letzten vier Kästchen in der neunten Zeile an und wenden die Sherlock-Holmes-Methode auf das Kästchen (9,6) an. Würde dort die Ziffer 6 stehen, dann blieben für die verbleibenden drei Felder nur die beiden Ziffern 1 und 7. Nur zwei Ziffern für drei Felder, das ist unmöglich. Es folgt nach Sherlock Holmes, daß in (9,6) eine 9 stehen muß.

In der vierten Zeile kann keine 7 stehen, da bereits in (4,1) eine steht. Ebenso kann in Spalte 7 keine 7 stehen. Das heißt aber, daß im mittleren Quadrat eine 7 nur in (5,4) oder in (5,5) stehen darf. Nun betrachten wir das benachbarte Quadrat. In der Zeile 5 darf keine 7 stehen, wie wir eben gesehen haben, auch nicht in der Zeile 6. In der Spalte 7 darf auch keine 7 stehen. Damit verbleibt für das letzte Quadrat in der Mitte nur die Position (6,9) für die 7. Wir erhalten damit die Schrittfolge in Tabelle 2.

Nr.	Ziffer	Position		Bem.
19	9	9	6	siehe oben
20	7	6	9	siehe oben
21	5	5	8	Quadrat
22	7	9	8	Quadrat
23	5	2	9	Quadrat

Tabelle 2: Die Schritte 19–23 des Times-Sudoku.

Die Situation nach dem 23. Schritt ist in Abbildung 31 dargestellt. Von nun ab geht alles recht einfach. In einem der Felder (1,1) und (1,3) muß eine 5 stehen, denn in Zeile 2 und in Spalte 2 darf sich keine 5 befinden. Damit muß in (3,4) eine 5 stehen, denn in der ersten und der zweiten Zeile sowie in der fünften und der sechsten Spalte befindet sich je eine 5. Der Rest ist in Tabelle 3 dargestellt, und in Abbildung 32 findet man die Lösung.

Nr.	Ziffer	Position	Bem.	Nr.	Ziffer	Position	Bem.
24	5	3 4	siehe oben	42	6	7 6	Spalte
25	9	2 4	Quadrat	43	4	7 5	Quadrat
26	7	2 5	Quadrat	44	6	2 8	Zeile
27	7	5 4	Quadrat	45	4	3 8	Zeile
28	3	5 6	Quadrat	46	1	1 8	Zeile
29	1	5 5	Quadrat	47	9	6 1	einz. Mögl.
30	3	7 4	Quadrat	48	6	6 7	einz. Mögl.
31	1	3 6	Spalte	49	5	6 3	Zeile
32	1	2 3	einz. Mögl.	50	1	7 1	Spalte
33	9	3 2	Quadrat	51	9	7 3	Zeile
34	8	5 2	Spalte	52	6	6 7	Zeile
35	6	1 2	Spalte	53	4	5 3	Quadrat
36	5	1 1	einz. Mögl.	54	9	5 7	Zeile
37	8	1 3	einz. Mögl.	55	4	4 7	Quadrat
38	4	1 4	Zeile	56	1	4 9	Quadrat
39	6	3 5	Quadrat	57	6	9 9	Zeile
40	6	4 4	Spalte	58	1	9 7	
41	4	6 6	Quadrat				

Tabelle 3: Die Schritte 24–58 des Times-Sudoku.

Diese Skizze eines Programmentwurfs ist natürlich noch nicht vollständig. Beim vorliegenden Sudoku hat es geklappt, es bleiben aber noch Fragen offen. Gerade diese Fragen sind es, die uns Mathematiker interessieren. Wer interessiert ist, findet in der Literatur Anregungen für die weitere Beschäftigung mit Sudokus [8, 7]. Auch das Internet bietet eine große Zahl von Beiträgen zu dem Thema an. Einige dieser interessanten Fragen wären etwa:

- Wie findet man ein lösbares Sudoku?
- Wie stellt man fest, daß es nicht noch weitere Lösungen gibt? Es ist nicht erwünscht, daß es mehrere verschiedene Lösungen gibt. Normalerweise ist in den Zeitschriften die Lösung des Sudokus angegeben, und es wäre sehr verwirrend, wenn man eine Lösung gefunden hätte, diese aber von der angegebenen Lösung verschieden wäre. Man würde sich dann fragen müssen, ob man nicht irgend etwas übersehen hat.
- Wie gelangt man zu sinnvollen Vorgaben? Gibt man zu viele Ziffern vor, dann wird das Sudoku zu leicht. Wenn man zu wenige vorgibt, dann könnte es sein, daß es mehrere Lösungen gibt.
- Man kann aus einem lösbaren Sudoku ein neues lösbares Sudoku erzeugen, indem man etwa die erste und die zweite Zeile vertauscht. Eine typisch mathematische Frage wäre: Welche Operationen mit einem lösbaren Sudoku führen wieder auf ein lösbares Sudoku.

- Schließlich gibt es noch die interessante Frage: Wieviele eindeutig lösbare Sudokus gibt es? Genauer: Wieviele verschiedene gelöste Sudokus gibt es, denn man kann ja zu dem gleichen ausgefüllten Sudoku-Schema verschiedene Vorgaben angeben. Man hat ausgerechnet, daß es 6 670 903 752 021 072 936 960 verschiedene Sudokus gibt. Wenn man unter diesen nur diejenigen zählt, die wirklich voneinander verschieden sind, die also nicht durch Operationen der eben angedeuteten Art ineinander überführt werden können, dann verbleibt immer noch eine Anzahl von 5 472 730 538 Sudokus [8].
- Man findet in den Zeitungen noch Sonderformen von Sudokus, und es gibt eine Anzahl ähnlicher Spiele, wie etwa magische Quadrate oder lateinische Quadrate [8]. Es gibt also für uns Mathematiker noch genügend zu spielen!

17 Blöcke stapeln

G: Wir hatten einen Trick mit Spielkarten vorgeführt. Man kann mit Karten aber noch viel mehr machen. Zum Beispiel: Wir nehmen zwei gleichgroße Blöcke her und versuchen, den zweiten so auf den ersten zu legen, daß er nicht herunterfällt und daß er möglichst weit überhängt. Es ist wohl ganz klar, daß das so lange gut geht bis der obere Block genau zur Hälfte übersteht.

A: Das leuchtet schon ein, aber Blöcke doch gar keine Karten!

G: Gemach, die Karten kommen schon noch. Wir versuchen jetzt, die beiden aufeinandergestapelten Blöcke so auf einen dritten zu legen, daß der oberste Block so weit wie möglich überhängt. Wie wir Mathematiker wissen, muß dann der zweite Block den untersten um $\frac{1}{4}$ der Blocklänge überragen. Nun können wir das Ganze noch weiter treiben und die drei Blöcke auf einen vierten legen. Wenn der unterste der drei den vierten um $\frac{1}{6}$ überragt, geht noch alles gut. Wenn wir immer so weiter machen, dann steht der oberste der Blöcke um

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots$$

über, wobei die drei Punkte sagen sollen, daß man dies so lange weiter treiben soll, als man Blöcke aufeinander setzt. Es ist nicht schwer, zu erraten, wie es weiter gehen muß (siehe Abbildung 33).

Ihr könnt selbst ein kleines Experiment ausführen: Legt eine Münze so auf den Tisch, daß sie um $\frac{1}{8}$ ihres Durchmessers übersteht. Um konkrete Zahlen zu haben: Ein Euro hat einen Durchmesser von 2.32 cm. Ein Achtel dieses Wertes ist 0.29 cm oder 2.9 beziehungsweise knapp 3 mm. Darauf legt Ihr eine Münze, die über die erste um $\frac{1}{6}$ ihres Durchmessers, bei der Euro-Münze also um 0.387 cm oder 3.87 mm über den äußersten Punkt der ersten Münze hinausragt. Darauf kommt eine Münze, die die zuletzt hinzugefügte um $\frac{1}{4}$ des Durchmessers, also um 0.58 cm oder 5.8 mm überragt. Schließlich packen wir auf diesen Stapel eine Münze, die über die letzte Münze um einen halben Münzdurchmesser oder 11.6 mm hinausragt. Dies ist in Abbildung 34 – von oben gesehen – dargestellt. Wie man sieht, befindet sich die letzte Münze völlig außerhalb des Tisches [22, Aufgabe 92].

Wenn Ihr die vier Münzen wie beschrieben übereinanderstapeln wollt, dann ist es sehr wichtig, die angegebenen Abstände möglichst genau einzuhalten, sonst stürzt die letzte Münze ab. Wenn man sie perfekt einhalten würde – und das würde für die erste Münze heißen, daß man sie um 2.9 mm über die Tischkante überstehen ließe, dann müßte man schon sehr genau messen können. Für unsere Zwecke genügt es, wenn sie um knapp 3 mm übersteht. Ebenso kann man mit einem gewöhnlichen Lineal kaum 3.87 mm abmessen. Auch hier können wir uns auf etwas weniger als 4

mm einigen. Die Abstände dürfen auf keinen Fall zu groß werden, und es genügt, wenn man sie auf etwa einen halben Millimeter genau einhält.

A: Ich kann mir nicht vorstellen, daß jemand nach Augenmaß die Münzen auf halbe Millimeter genau aufeinanderpacken kann.

G: Das kann ich auch nicht. Ich habe einen kleinen Trick benutzt und mir aus Pappe eine Schablone wie in Abbildung 35 ausgeschnitten. Ihr könnt die Schablone aus der Abbildung verwenden, indem Ihr sie auf nicht zu dicke Pappe klebt.

Versucht es doch einmal, allerdings sollte man eine ruhige Hand besitzen und nicht gleich ungeduldig werden.

A: Wann kommen denn nun endlich die Karten?

G: Jetzt! Ein Rommé-Spiel enthält 55 Karten. Was meint Ihr, wie weit die oberste Karte überstehen würde, wenn man sie geschickt aufeinanderlegen würde?

...

G: Mit einem einfachen Computer kann man das ganz leicht ausrechnen. Man erhält einen Überhang von etwa $2\frac{1}{4}$ Karten. Es wird behauptet [10, S. 159], daß man – mit etwas Geschick und ruhiger Hand – leicht einen Überhang von 2 Karten, das sind 9 cm, erzielen kann.

A: Wenn man jetzt aber noch mehr und immer mehr Karten aufeinanderstapeln würde, wie groß könnte man den Überhang machen?

G: Was meint Ihr?

...

G: Wir lernen in der Mathematik im ersten Semester, daß diese Summe beliebig groß gemacht werden kann.

A: Das glaube ich nicht!

G: Es klingt auch unglaublich.

A: Man könnte also einen Überhang von, sagen wir, einem Meter erzeugen?

G: Das und noch mehr. Ein kluger Mensch hat einmal ausgerechnet, wieviele Karten man benötigen würde, um einen Überhang von 50 Kartenlängen zu erhalten [10, S. 159]. Eine normale Spielkarte hat eine Höhe von 8.75 cm. 50 Kartenlängen entsprechen demgemäß 4.375 m. Stell Dir vor, daß ein solcher Kartenstapel fast 5 m über die Tischkante herausragen würde. Das Problem ist nur, daß man sehr viele Karten brauchen würde. Nach den Berechnungen des klugen Mathematikers bräuchte man

15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497

Karten! Ich werde jetzt nicht versuchen, diese Zahl vorzulesen. Sie hat immerhin 44 Stellen! Für solche Monster gibt es keine Namen.

A: Nein, das wollen wir alle nicht. Aber vielleicht kannst Du diese gigantische Zahl ein wenig veranschaulichen?

G: Wir versuchen einmal, auszurechnen, wie hoch ein Kartenstapel sein würde der so viele Karten enthält. Was meint Ihr?

...

G: Nun, der Stapel wäre wahrhaft unvorstellbar hoch. Man kann die Höhe auf einem Computer oder einen Taschenrechner leicht ausrechnen. Das Resultat ist ebenfalls eine Zahl, die keinen Namen hat. Die Anzahl der Kilometer, die der Stapel hoch ist, beginnt mit einer 5 und hat dann 36 weitere Dezimalstellen, wir Mathematiker schreiben das so: $5 \cdot 10^{36}$ km.

A: Und was bedeutet diese Zahl?

G: Die Astronomen sagen uns, daß unser Universum, soweit wir es beobachten können, einen Durchmesser von etwa $2 \cdot 10^{23}$ km hat. Auch diese Zahl übersteigt unsere Begriffe, aber sie ist kleiner als die Höhe des Kartenstapels, und zwar unvorstellbar kleiner. Man würde 10^{13} Universen benötigen, um den Kartenstapel aufzunehmen. Eine Billion ist eine Million Millionen, die Zahl der Universen betrüge demnach 10 Billionen!

A: Das ist wirklich unvorstellbar!

Literatur

- [1] Alexander Adrion. *Adrion's Zauberkabinett zum Verwundern und Vorführen für jedermann (mit Trickbeigaben)*. Studio DuMont. DuMont Buchverlag, Köln, 1980.
- [2] Alexander Adrion. *Die Kunst zu zaubern. Mit einer Sammlung der interessantesten Kunststücke zum Nutzen und Vergnügen für jedermann*. dumont taschenbücher, 1680. DuMont Buchverlag, Köln, 2. Auflage, 1990.
- [3] W. Ahrens. *Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Erster Band*. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1921.
- [4] *Natürliches Zauber-Buch Oder: Neu-eröffneter Spiel-Platz rarer Künste / in welchem nicht allein alle Taschen-Spieler- und andere curiöse Mathematische und Physicalische Künste sondern auch die gebräuchlichen Karten-Würffel Billard und andere Spiele, aufs genaueste beschrieben, und mit vielen Figuren erläutert werden. Mit Königl. Pohlnisch und Churf. Sächs. Privilegio*. Bey Adam Stein und Gabriel Nicolaus Raspe, Nürnberg, 1745.
- [5] Lewis Carroll. *Alice's Adventures in Wonderland and Through the Looking-Glass and what Alice found there. Edited with an Introduction by Roger Lancelyn Green, With Illustrations by John Tenniel*. The World's Classics. Oxford University Press, Oxford, New York, 1971.
- [6] Lewis Carroll. *Die Alice-Romane. Alices Abenteuer im Wunderland. Durch den Spiegel und was Alice dort fand. Mit den Illustrationen von John Tenniel, Übersetzt und herausgegeben von Günther Flemming*. Philipp Reclam jun., Stuttgart, 2002.
- [7] Jean-Paul Delahaye. Mathematische Unterhaltungen: Sudoku oder die einsamen Zahlen. *Spektrum der Wissenschaft*, März 2006:100–106.
- [8] Ch. Elsholtz and A. Mütze. Sudoku im Mathematikunterricht. *Mathematische Semesterberichte*, 54:69–93, 2007.
- [9] Martin Gardner. *Mathematische Hexereien, Denksportaufgaben, Kunststücke, Rätsel, Spiele, mathematische Zauberei*. Ullstein, Berlin [u.a.], 1979.

- [10] Martin Gardner. *Mathematisches Labyrinth. Neue Probleme für die Knobelgemeinde*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1979.
- [11] Martin Gardner. *Mathematik und Magie. 115 Karten- Würfel- und Dominotricks, mathematische Spiele und Zauberkunststücke, Vorwort von Alexander Adrion*. dumont taschenbücher, 106. DuMont Buchverlag, Köln, 1981.
- [12] Michael Kleber. The best card trick. *Mathematical Intelligencer*, 24(1):9–11, Winter 2002.
- [13] Dominic Olivastro. *Das chinesische Dreieck. Die kniffligsten mathematischen Rätsel aus 10 000 Jahren. Aus dem Amerikanischen von Michael Schmidt*. Dromersche Verlagsanstalt Th. Knaur Nachf., München, 1995.
- [14] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Stein der Weisen. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 1998.
- [15] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Gefangene von Askaban. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 1999.
- [16] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und die Kammer des Schreckens. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 1999.
- [17] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Feuerkelch. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 2000.
- [18] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Orden des Phönix. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 2003.
- [19] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und der Halbblutprinz. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 2005.
- [20] Joanne K. Rowling. *Harry Potter und die Heiligtümer des Todes. Aus dem Englischen von Klaus Fritz*. Carlsen Verlag GmbH, Hamburg, 2007.
- [21] Hugo Steinhaus. *Kaleidoskop der Mathematik*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.
- [22] Hugo Steinhaus. *100 neue Aufgaben aus der elementaren Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main, 1973.
- [23] Jearl Walker. Experiment des Monats: Labyrinthwandern mit Methode: Wie man sich in einem Irrgarten zurechtfindet und ohne rettenden Ariadne-Faden wieder herausgelangt. *Spektrum der Wissenschaft*, Februar 1987:144–149.
- [24] Th. Wolff. *Der Wettlauf mit der Schildkröte. Gelöste und ungelöste Probleme*. August Scherl G. m. b. H., Berlin S W, 1929.

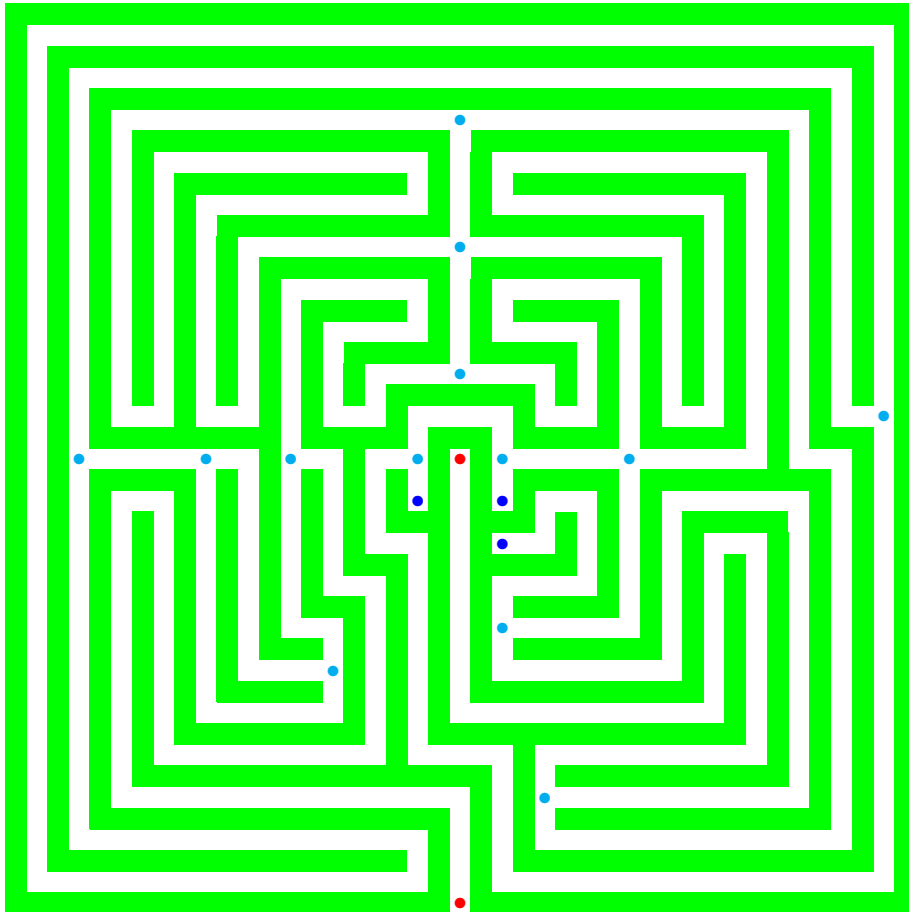


Abbildung 23: Das Heckenlabyrinth von Chevening in der Grafschaft Kent (England).

Start- und Zielpunkt sind **rot** markiert.

Endpunkte von Sackgassen sind **blau** gekennzeichnet.

Hellblaue Markierungen bezeichnen Punkte, an denen eine Entscheidung für einen von mehreren möglichen Wegen notwendig ist.

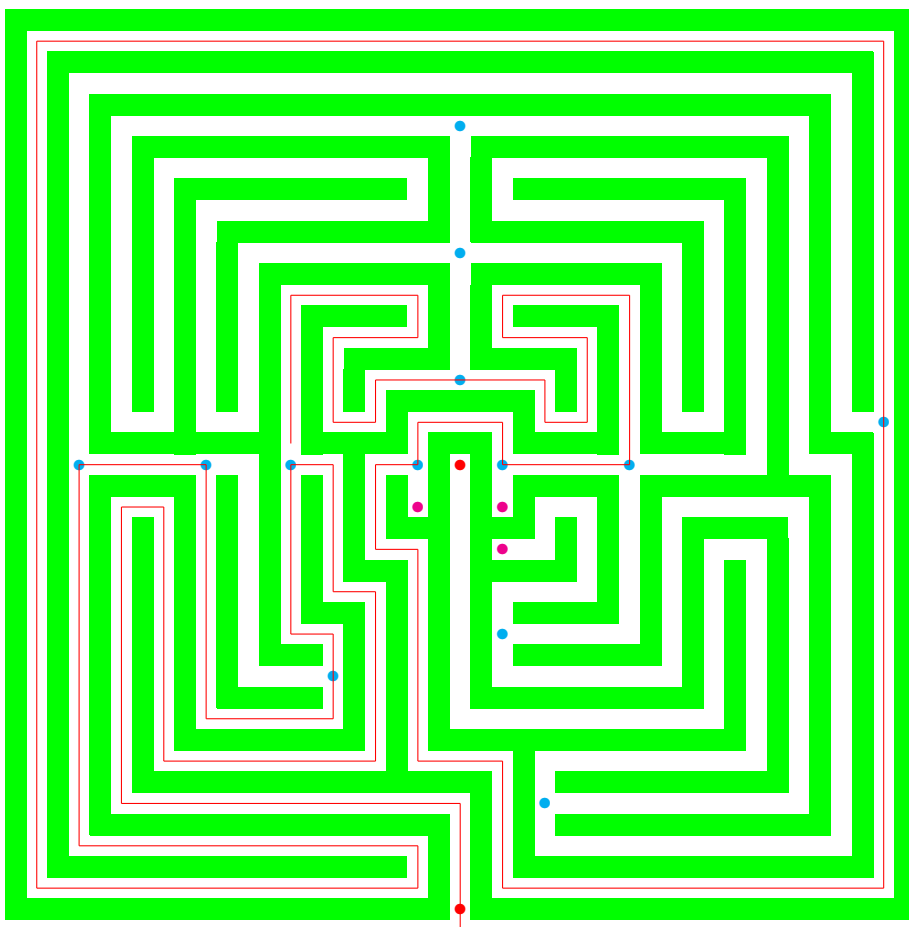


Abbildung 24: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Strategie „immer links“.

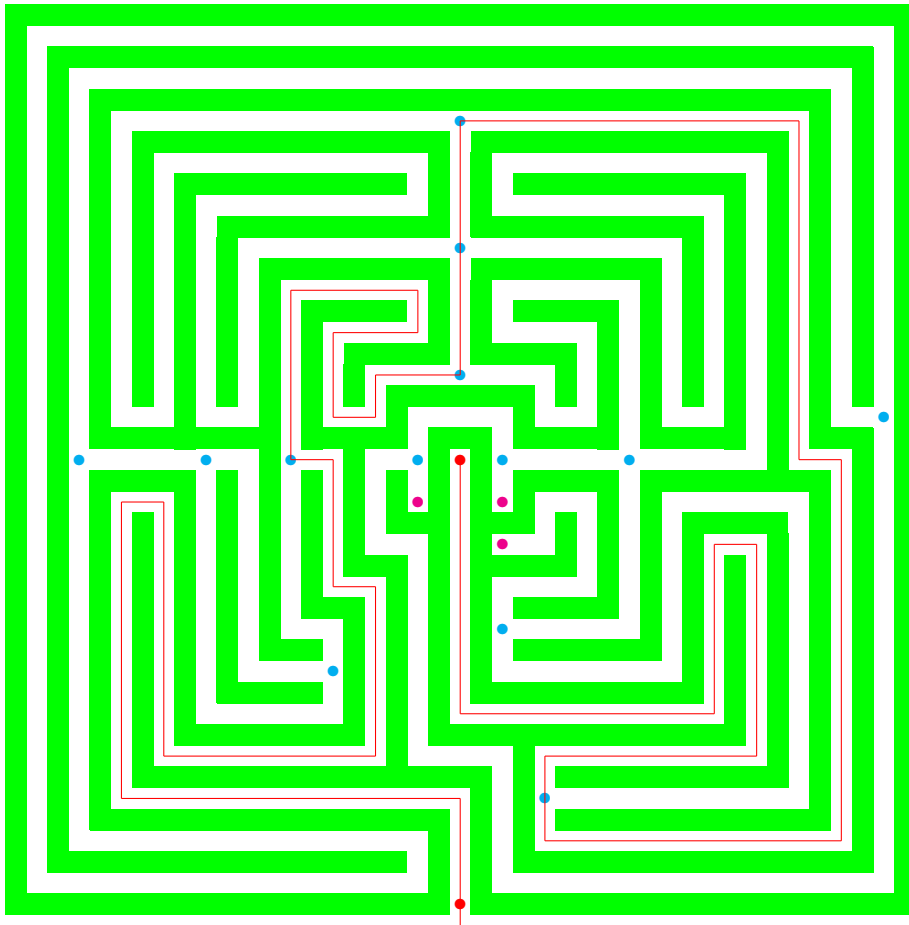


Abbildung 25: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Ein Weg zum Ziel.

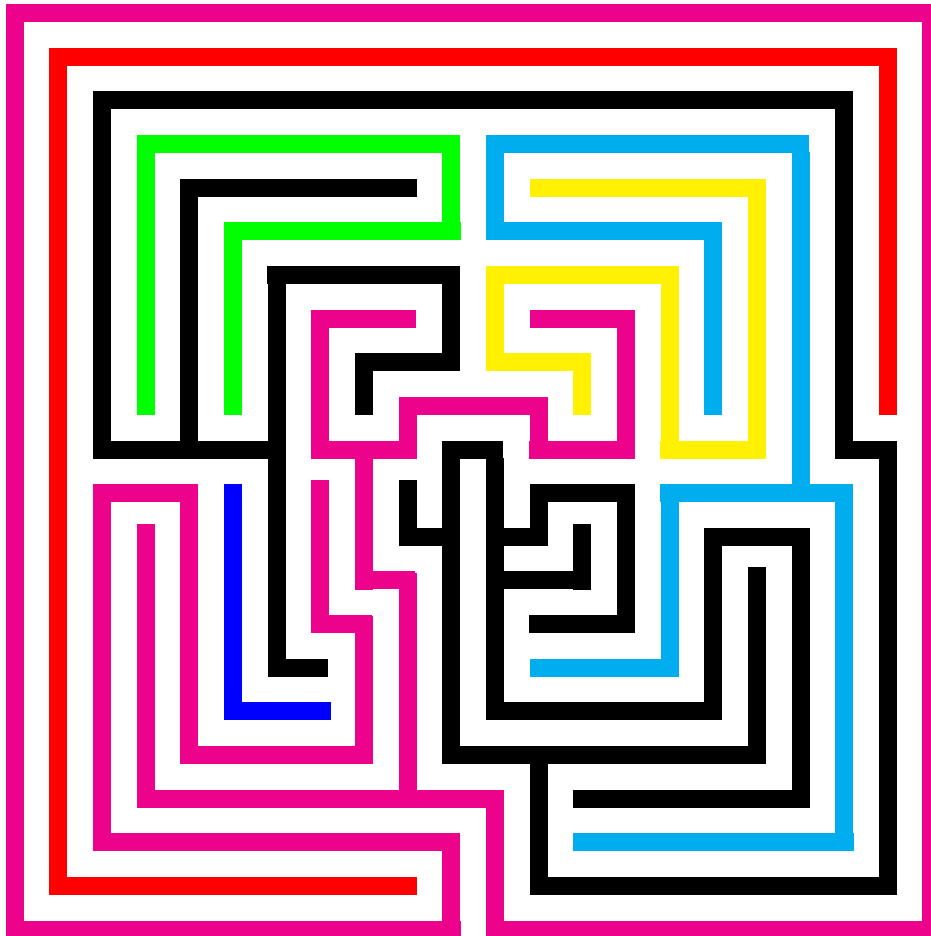


Abbildung 26: Das Heckenlabyrinth von Chevening.

Die sieben zusammenhängenden Teile („Inseln“) des Labyrinths.

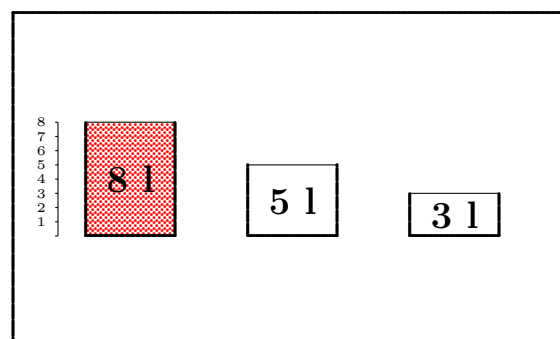


Abbildung 27: Die Weinkrugaufgabe.

				3		7		9
	4				8			
2		7						
	3			9	5		8	
6								2
	1		2	8			3	
						5		8
			1				9	
4		3		2				

Abbildung 28: Beispiel-Sudoku.

Dieses Sudoku erschien in der *Times* vom 23. Juli 2005. Es wurde dort als „Fiendish“ klassifiziert, also als „teuflisch“ oder „höllisch“.

1 5 8	5 6 8	1 5 6 8	4 5 6	3	1 2 4 6	7	1 2 4 5 6	9
1 3 5 9	4	1 5 6 9	5 6 7 9	5 6 7	8	1 2 3 6	1 2 5 6	1 3 5 6
2	5 6 8 9	7	4 5 6 9	4 5 6	1 4 6 9	1 3 4 6 8	1 4 5 6	1 3 4 5 6
7	3	2 4	4 6 7	9	5	1 4 6	8	1 4 6 7
6	5 8 9	4 5 8 9	3 4 7	1 4 7	1 3 4 7	1 4 9	1 4 5 7	2
5 7 9	1	4 5 9	2	8	4 6 7	4 6 9	3	4 5 6 7
1 3 7 9	2 6 7 9	1 2 6 9	3 4 6 7 9	4 6 7	3 4 6 7 9	5	1 2 4 6 7	8
5 7 8	2 5 6 7 8	2 5 6 8	1	4 5 6 7	3 4 6 7	2 3 4 6	9	3 4 6 7
4	5 6 7 8 9	3	5 6 7 8 9	2	6 7 9	1 6	1 6	1 6

Abbildung 29: Beispiel-Sudoku – Angabe der möglichen Ziffern für jedes Kästchen.

				3	2	7		9
3	4				8	2		
2		7				8		3
7	3	2		9	5		8	
6								2
	1		2	8			3	
	7					5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	69	16	¹⁶ ₇	¹⁶ ₇

Abbildung 30: Beispiel-Sudoku – Zustand nach dem achtzehnten Schritt.

				3	2	7		9
3	4				8	2		5
2		7				8		3
7	3	2		9	5		8	
6				7			5	2
	1		2	8			3	7
	7					5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	9		7	

Abbildung 31: Beispiel-Sudoku – Zustand nach dem 23. Schritt.

5	6	8	4	3	2	7	1	9
3	4	1	9	7	8	2	6	5
2	9	7	5	6	1	8	4	3
7	3	2	6	9	5	4	8	1
6	8	4	7	1	3	9	5	2
9	1	5	2	8	4	6	3	7
1	7	9	3	4	6	5	2	8
8	2	6	1	5	7	3	9	4
4	5	3	8	2	9	1	7	6

Abbildung 32: Beispiel-Sudoku – Lösung.

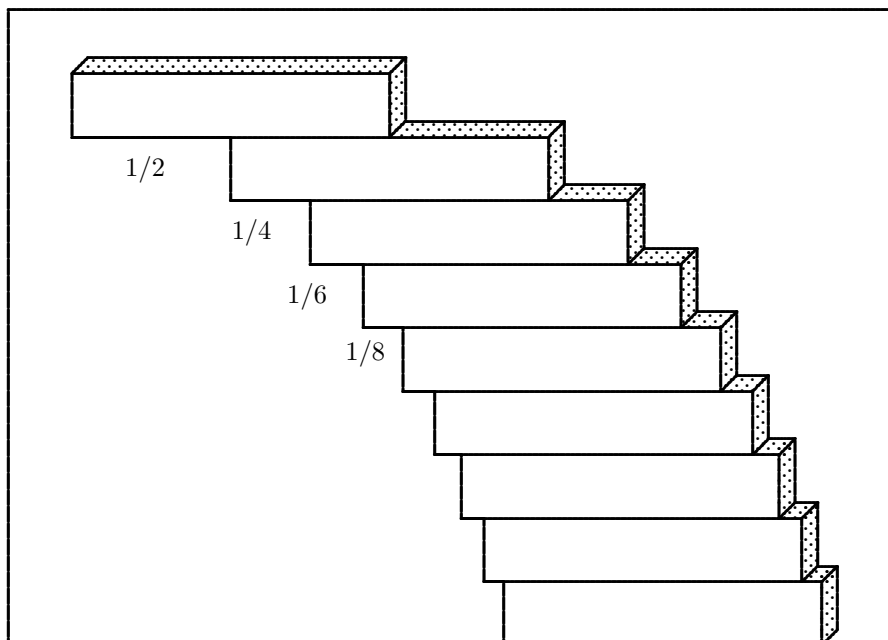


Abbildung 33: Stapel von Blöcken.

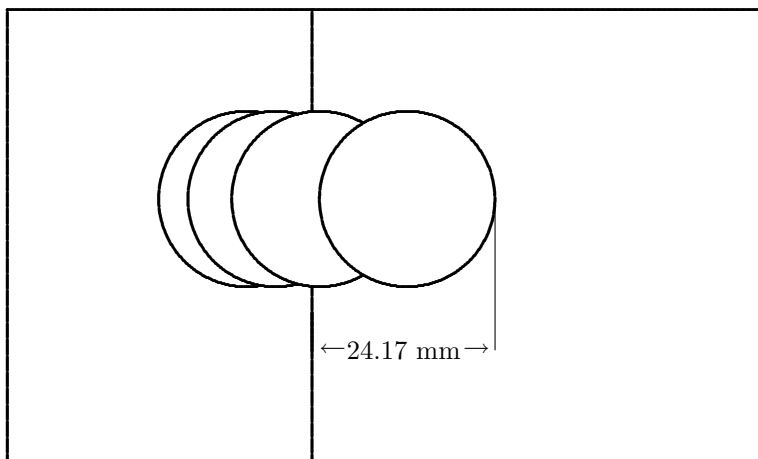


Abbildung 34: Stapelung von vier Münzen über eine Tischkante.

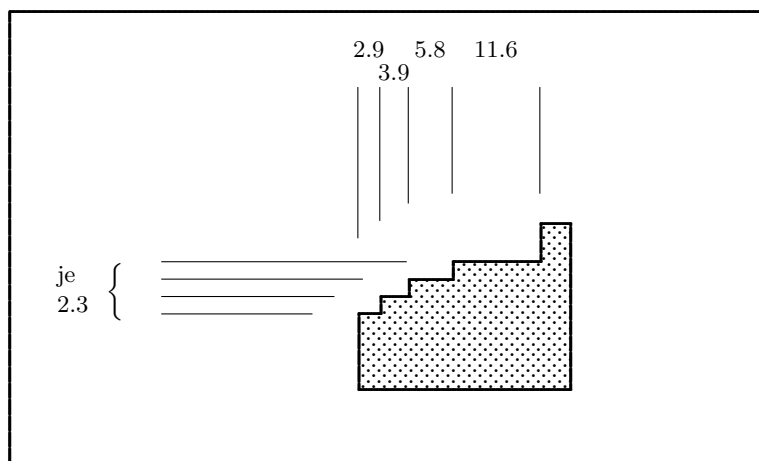


Abbildung 35: Schablone für den Münzentrück (Maßangaben in mm).